# Das Schema der strukturellen Induktion über den Formelaufbau

von Tina Wieczorek

Seien $P$ eine Menge von Aussagensymbolen und $\mathbf{E}$ eine Eigenschaft, die auf Formeln zutreffen kann.

Eine Aussage der folgenden Form soll mit struktureller Induktion bewiesen werden:

**Für alle Formeln $\varphi \in \mathrm{Form}(P)$ gilt E.**

**Induktionsanfang.** Sei $\varphi \in \mathrm{Form}(P)$ eine atomare Formel, also $\varphi = p$ für ein $p \in P$ oder $\varphi = \top$ oder $\varphi = \bot$.

Zeige, dass in allen drei Fällen die Eigenschaft $\mathbf{E}$ auf $\varphi$ zutrifft.

**Induktionsschritt.** Sei $\varphi \in \mathrm{Form}(P)$ eine zusammengesetzte Formel, also

$$\varphi = \neg\psi \quad \text{oder} \quad \varphi = \psi \otimes \chi,$$

wobei

$$\otimes \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \quad \text{und} \quad \psi, \chi \in \mathrm{Form}(P).$$

**Induktionsvoraussetzung.** Für $\psi$ bzw. $\psi$ und $\chi$ gilt $\mathbf{E}$.

Zeige mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung, dass auch für $\varphi$ die Eigenschaft $\mathbf{E}$ gilt (dabei sind dann insgesamt fünf Fälle zu unterscheiden: $\varphi = \neg\psi$, $\varphi = \psi \wedge \chi$, $\varphi = \psi \vee \chi$, $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ und $\varphi = \psi \leftrightarrow \chi$). ■

## Beispiele

1. Sei $\mathbf{E}$ die Eigenschaft $\mathbf{E}(\varphi)$: "Die Anzahl der linken Klammern von $\varphi$ ist gleich der Anzahl der rechten Klammern von $\varphi$."
   Den Induktionsbeweis des Satzes "Für alle Formeln $\varphi \in \mathrm{Form}(P)$ gilt $\mathbf{E}$" habt Ihr als erstes Beispiel einer strukturellen Induktion in der Übung kennengelernt.

2. Sei $\mathbf{E}$ die Eigenschaft $\mathbf{E}(\varphi)$: "Die Gültigkeit von $\varphi$ unter einer Belegung hängt nur von der Belegung der Aussagensymbole ab, die in $\varphi$ vorkommen."
   Der Satz "Für alle Formeln $\varphi \in \mathrm{Form}(P)$ gilt $\mathbf{E}$" ist das Koinzidenzlemma und wurde mit struktureller Induktion in der Vorlesung bewiesen.

## Varianten der strukturellen Induktion

Oft möchte man eine Eigenschaft nicht für alle Formeln sondern nur für eine spezielle Menge $X$ von Formeln nachweisen. Dann sind - je nach Beschaffenheit von $X$ - zwei verschiedene Modifikationen des Induktionsschemas möglich.

Seien also $P$ eine Menge von Aussagensymbolen, $X \subseteq \mathrm{Form}(P)$ eine Teilmenge der Formeln über $P$ und $\mathbf{E}$ eine Eigenschaft, die auf Formeln zutreffen kann.

Diesmal soll eine Aussage der folgenden Form mit struktureller Induktion bewiesen werden:

**Für alle Formeln $\varphi \in X$ gilt E.**

### 1. Variante: $X$ rekursiv definierbar

Diese Variante kann man benutzen, wenn $X$ rekursiv definierbar ist. Dann führt man eine Induktion über den rekursiven Aufbau von $X$ statt von ganz $\mathrm{Form}(P)$ durch. Die Struktur des Beweises ist analog zu der oben angegebenen, man bezieht sich halt nur auf den rekursiven Aufbau von $X$ statt auf den von ganz $\mathrm{Form}(P)$.

### Beispiel für die 1. Variante der strukturellen Induktion

Seien $B_1 : P \to \{T, F\}$ und $B_2 : P \to \{T, F\}$ zwei Belegungen derart, dass für alle $p \in P$ gilt:

$$\text{Wenn } B_1(p) = T, \text{ dann auch } B_2(p) = T.$$

Seien

$$X := \{\varphi \in \mathrm{Form}(P) : \varphi \text{ ist positiv}\}$$

und $\mathbf{E}$ die Eigenschaft $\mathbf{E}(\varphi)$: "Wenn $B_1 \models \varphi$ dann auch $B_2 \models \varphi$".
Der Induktionsbeweis der Aussage "für alle $\varphi \in X$ gilt $\mathbf{E}$" sowie der rekursive Aufbau von $X$ ist z. T. in der Übung gemacht worden (im Buch Aufgabe 12-3).

### 2. Variante

Leider ist $X$ nicht immer rekursiv definierbar. Dann muss man vor allem bei der Formulierung der Induktionvoraussetzung und deren Verwendung im Induktionsschritt aufpassen:

**Induktionsanfang.** Sei $\varphi \in X$ eine atomare Formel. (Diesmal könnte es sein, dass nicht alle Fälle betrachtet werden, weil möglicherweise nur bestimmte atomare $\varphi$ in $X$ liegen)

Zeige, dass in diesem Fall die Eigenschaft $\mathbf{E}$ auf $\varphi$ zutrifft.

**Induktionsschritt.** Sei $\varphi \in X$ eine komplexe, also zusammengesetzte Formel, d. h.

$$\varphi = \neg\psi \quad \text{oder} \quad \varphi = \psi \otimes \chi,$$

wobei

$$\otimes \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \quad \text{und} \quad \psi, \chi \in \text{Form}(P).$$

**Induktionsvoraussetzung.** Wenn $\psi$ bzw. $\psi$ und/oder $\chi$ Elemente von $X$ sind, so gilt für $\psi$ bzw. $\psi$ und/oder $\chi$ **E**.

Zeige mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung, dass für $\varphi$ die Eigenschaft **E** gilt. Diesmal muss man aufpassen, wenn man die Voraussetzung anwendet: Es ist erst zu überprüfen, ob $\psi$ bzw. $\chi$ Elemente von $X$ sind und nur in diesem Fall darf dann die Induktionsvoraussetzung angewandt werden. ■

### Beispiel für die 2. Variante

Sei $X := \{\varphi \in \text{Form}(P) : \varphi \text{ ist determiniert}\}$. Dann lässt sich $X$ nicht rekursiv definieren. Ausserdem sei **E** die Eigenschaft $\mathbf{E}(\varphi)$: "In $\varphi$ kommen $\bot$ oder $\top$ vor oder es gibt ein Aussagensymbol $p \in P$, dass in $\varphi$ mindestens zweimal vorkommt".

## Kleine Bemerkung für die interessierte Studentin und den interessierten Studenten

Es ist nicht unbedingt nötig, die Varianten zu benutzen, wenn man einen Satz der Form *für alle* $\varphi \in X$ *gilt* **E** für eine Menge $X \subseteq \text{Form}(P)$ beweisen will. Betrachte **E'**($\varphi$): "Wenn $\varphi \in X$, dann $\mathbf{E}(\varphi)$". Dann kann man *für alle Formeln* $\varphi \in \text{Form}(P)$ *gilt* **E'** auch nach dem ursprünglichen Schema zeigen, muss aber beachten, dass nun eine *wenn/dann-Aussage* nachzuweisen ist.