B. Mahr, S. Bab, T. Wieczorek WS 05/06

Klausur TheGI 3

14. Februar 2006

Version A

Name, Vorname: ____________________ Matr.-Nr.: ____________________

Übung im WS ________

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punkte:									

Summe: **Klausurnote:**

Punkte: Insgesamt sind in der Klausur 60 reguläre sowie 4 Bonuspunkte zu erreichen. Die Klausur gilt mit Erreichen von mindestens 30 Punkten als bestanden.

Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Form der Abgabe: Bitte laßt Euer Exemplar der Klausur geklammert, schreibt aber bitte dennoch auf jedes von Euch benutzte Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer.

Hilfsmittel: Als Hilfsmittel ist ausschließlich ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt in eigener Handschrift (keine Kopien) zugelassen, keine Mobiltelefone, PDAs, iPODs, Bücher, Hefter, Kopien, etc.

Hinweis: Verschafft Euch zunächst einen Überblick über alle Aufgaben und beginnt mit der Aufgabe, die Euch am wenigsten aufwendig erscheint.

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*

Es seien $P = \{p, q\}$ eine Menge von Aussagensymbolen und $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}(P)$. Gib **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

Behauptung	wahr?	falsch?
Wenn φ eine Tautologie ist, so gilt $\emptyset \vdash_R \varphi$ für alle korrekten Hilbertkalküle $(R, \vdash_R)$.		
Ist S eine Klauselrepräsentation von $\varphi \wedge \psi$ und ist aus S die leere Klausel beweisbar, so gilt $\varphi \Vdash \neg\psi$.		
Ist $\varphi \to \psi$ eine Tautologie, so gilt $\varphi \vdash_R \psi$ in jedem vollständigen Hilbertkalkül.		
Jede Obermenge einer Junktorbasis ist eine Junktorbasis.		
$\varphi \to \psi$ ist tautologisch genau dann, wenn $\varphi \vdash_R \psi$ fr jeden vollständigen und korrekten Sequenzenkalkül.		
Gilt $\mathrm{Symb}(\varphi) \cap \mathrm{Symb}(\psi) = \emptyset$ und sind φ und ψ beide erfüllbar, aber nicht tautologisch, so gilt $\varphi \not\Vdash \psi$.		
Für jedes φ existiert ein ψ in KNF mitmit $\varphi \equiv \psi$.		
Sei S_φ eine Klauselrepräsentation einer Formel φ. Lassen sich aus S_φ Klauseln der Form $\{p, \neg p\}$ resolvieren, so sagt die Existenz solcher Klauseln nichts über die Gültigkeit von φ aus (φ kann also sowohl kontradiktorisch als auch erfüllbar sein).		

Aufgabe 2 *(4+4+2 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen sowie $p, q \in P$.

(a) Ergänze die folgende Wahrheitstafel! (Die Formel dieser Tafel φ ist mit Hilfe der Junktoren aus $\{\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ gebildet, und es ist $\mathrm{Symb}(\varphi) = \{p, q\}$.) In jede Lücke geht nur **ein** Zeichen!

p	q	$\neg$	(	q	$\to$	$\ldots$	)	$\ldots$	$\ldots$
T	T				F			T	
T	F	F						F	
F	T				F			F	
F	F				T			T	

(b) Sei φ die Formel, deren Wahrheitstafel in Teilaufgabe (a) zu vervollständigen war. Gib sowohl eine disjunktive Normalform für φ als auch eine konjunktive Normalform für φ an.

(c) Entscheide, ob die folgenden Formeln in DNF, in KNF oder in DNF und KNF zugleich sind. Bei diesem Aufgabenteil werden für falsche Antworten *keine* Punkte abgezogen.

$$\chi_1 = (p \vee \neg r \vee \neg p \vee r)$$

$$\chi_2 = \bot \wedge p \wedge q$$

Aufgabe 3 *(3+2 Punkte)*

Es seien $\Phi \subseteq \mathrm{Form}(P)$ und $\psi, \varphi, \chi \in \mathrm{Form}(P)$.

(a) Beweise oder widerlege (durch Angabe eines Gegenbeispiels) die folgende Behauptung: Gilt $\Phi \Vdash \neg\varphi$ und $\Phi \Vdash (\varphi \to \psi) \to \varphi$, so gilt auch $\Phi \Vdash \chi$.

(b) Ist die folgende Sequenzenregel korrekt? Begründe deine Antwort schlüssig (verwende dabei (a)).

$$\frac{\triangle \rhd \neg\varphi, \quad \triangle \rhd (\varphi \to \psi) \to \varphi}{\triangle \rhd \chi}$$

Aufgabe 4 *(5 Punkte)*

Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}(P)$. Beweise mit Hilfe des (korrekten und vollständigen) Hilbert Kalküls HK

$$\frac{}{p \to (q \to p)}\ (\varrho_1) \qquad \frac{}{(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))}\ (\varrho_2)$$

$$\frac{}{(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)}\ (\varrho_3) \qquad \frac{p, p \to q}{q}\ (\varrho_4)$$

die Folgerung

$$\{\neg\varphi \to \neg\psi,\, \psi\} \vdash_{HK} \varphi$$

indem Du in dem untenstehenden Beweisbaum alle durch $\ldots$ gekennzeichneten Leerstellen in geeigneter Weise durch die Symbole φ, ψ und deren Negationen ersetzt:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\ldots \to \ldots}\,Vor \qquad \dfrac{}{(\ldots \to \ldots) \to (\ldots \to \ldots)}\,\varrho_3}{\ldots \to \ldots}\,\varrho_4 \qquad \dfrac{}{\ldots}\,Vor}{\ldots}\,\varrho_4$$

Aufgabe 5 *(4+2 Punkte)*

Betrachte die nachstehende Folgerung:

$$\underbrace{\{\neg(r \vee p) \to \neg q,\, q\}}_{=:\Phi} \Vdash \underbrace{r \vee p}_{=:\varphi}$$

.

(a) Beweise die Folgerung mit Hilfe des Resolutionsverfahrens.

(b) Beweise die Folgerung mit Hilfe des Kalküls HK, indem du $\Phi \vdash_{HK} \varphi$ zeigst.

Hinweis zu (b): Verwende Aufgabe 4.

Aufgabe 6 *(5 Punkte)*

Es seien $\Sigma = (S, OP, R)$ eine logische Signatur, X eine zu Σ passende Familien von Variablenmengen, $x \in X$, $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$ sowie $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{Form}_\Sigma(X)$. Gib **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

Behauptung	wahr?	falsch?
Sei $\mathcal{C}$ eine Menge von Σ-Strukturen. Die zugehörige Theorie $Th_\Sigma(\mathcal{C})$ besteht aus allen Formeln, die bei allen $A \in \mathcal{C}$ gültig sind.		
Die Substitution σ mit $\sigma(x) = y$, $\sigma(y) = x$ ist zulässig für $\varphi = \exists x.x = y$.		
Gilt $\varphi \equiv \psi$, so gilt stets für alle $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$ und alle $\beta : X \to A$, dass $(A, \beta) \models \varphi$ genau dann, wenn $(A, \beta) \models \psi$.		
Sind φ und ψ Sätze mit $\varphi \equiv \psi$, so gilt stets für alle $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$ und alle $\beta : X \to A$, dass $(A, \beta) \models \varphi$ genau dann, wenn $(A, \beta) \models \psi$.		
Wenn $\varphi \Vdash \psi$, dann gilt $\mathrm{Mod}_\Sigma(\{\psi, \neg\varphi\}) = \emptyset$.		
Wenn eine Substitution σ zulässig für φ ist, so gilt stets $\varphi[\sigma] \Vdash \varphi$.		
Ist φ allgemeingültig, so gilt $\mathrm{Strukt}_\Sigma = \mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi)$.		
Es gilt $\mathrm{Strukt}_\Sigma \setminus \mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) = \mathrm{Mod}_\Sigma(\neg\varphi)$, wenn φ ein Satz ist.		
Ist $\mathrm{Free}(\varphi) = \{x\}$, und wenn für ein $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$, ein $\beta : X \to A$ und alle $a \in A_{\mathrm{sort}(x)}$ gilt: $(A, \beta[x/a]) \models \varphi$, so folgt $A \in \mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi)$.		
Wenn für eine Substitution σ $\varphi \Vdash \varphi[\sigma]$ gilt, so ist σ zulässig für φ.		

Aufgabe 7 *(10+10 Punkte)*

Gegeben sei die Signatur $\Sigma = (S, OP, R)$, wobei $S = \{s\}$, $OP = \{c,\ f\}$ mit $c :\to s$, $f : s \to s$ sowie $R = \{P\}$ mit $P : \langle ss \rangle$. Außerdem seien $x, y \in X_s$. Betrachte die folgenden Formeln φ_i, $i = 1, \ldots, 5$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \exists x. f(c) = x, \\
\varphi_2 &= \exists x. f(x) = c, \\
\varphi_3 &= \exists x. f(x) = x, \\
\varphi_4 &= f(c) = c, \\
\varphi_5 &= (\neg P(x, c) \vee (\exists y. f(x) = y)) \wedge (P(x, c) \wedge \neg(\exists y. f(x) = y))
\end{aligned}$$

(a) Überprüfe, ob die Formeln tautologisch, erfüllbar oder kontradiktorisch sind. Ist φ_i tautologisch, so beweise dies. Ist φ_i kontradiktorisch, so beweise dies. Ist φ_i erfüllbar, aber nicht tautologisch, so gib $\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi_i)$ sowie eine Struktur A_i an, in der φ_i **nicht** gültig ist.

(b) Seien $i, j \in \{1, \dots, 5\}$. Gilt $\varphi_i \Vdash \varphi_j$? Beantworte die Frage, indem du die folgende Tabelle ausfüllst. Wenn die Folgerung gilt, so trage in die Tabelle **ja** ein. Gilt die Folgerung nicht,so trage **nein** ein. Für jeden richtigen Eintrag gibt es einen halben Punkt, für jeden falschen wird ein halber Punkt abgezogen. Fehlende Einträge werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es auf diese Teilaufgabe aber mindestens null Punkte.(Für die trivialen, immer gültigen Folgerungen $\varphi_i \Vdash \varphi_i$ haben wir die Antwort schon eingetragen. Dafür gibt es keine Punkte.)

$\Vdash$	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
φ_1	ja				
φ_2		ja			
φ_3			ja		
φ_4				ja	
φ_5					ja

Aufgabe 8 *(2+2+1 Punkte)*
Gegeben sei die Signatur $\Sigma = (S, OP, R)$, wobei $S = \{s_1, s_2\}$, $OP = \emptyset$ und $R = \{P\}$ mit $P : \langle s_1 s_2 \rangle$. Außerdem seien die Variablenmengen $X_{s_1} = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$ und $X_{s_2} = \{u, v, w, u_1, u_2, \ldots\}$.

(a) Formuliere eine Formel φ, sodass die Modelle A von φ genau die Strukturen sind, für die P_A *linkstotal* ist, d. h. für alle $a \in A_{s_1}$ gibt es mindestens ein $b \in A_{s_2}$ mit aP_Ab.

(b) Formuliere eine Formel ψ, sodass die Modelle A von ψ genau die Strukturen sind, für die P_A *rechtseindeutig* ist, d. h. für alle $a \in A_{s_1}$ gibt es höchstens ein $b \in A_{s_2}$ mit aP_Ab.

(c) Formuliere eine Formel χ, sodass die Modelle A von χ genau die Strukturen sind, für die P_A eine *totale Funktion* ist, d. h. für alle $a \in A_{s_1}$ existiert genau ein $b \in A_{s_2}$ mit aP_Ab.

Aufgabe 9 *(4 Bonuspunkte)*
Sei Σ eine Signatur mit einer zugehörigen Variablenmenge X und $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$. Beweise:

$$\varphi \equiv \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Th}_\Sigma(\varphi) = \mathrm{Th}_\Sigma(\psi)$$

.