B. Mahr, S. Bab, T. Wieczorek WS 06/07

Klausur TheGI 3

13. Februar 2007

Version A

Name, Vorname: ______________________ Matr.-Nr.: ______________________

Übung im WS ________

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkte:								

Summe: **Klausurnote:**

Punkte: Insgesamt sind in der Klausur 50 Punkte zu erreichen. Die Klausur gilt mit Erreichen von mindestens 25 Punkten als bestanden.

Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Form der Abgabe: Bitte laßt Euer Exemplar der Klausur geklammert, schreibt aber bitte dennoch auf jedes von Euch benutzte Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer.

Hilfsmittel: Als Hilfsmittel ist ausschließlich ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt in eigener Handschrift (keine Kopien) zugelassen, keine Mobiltelefone, PDAs, iPODs, Bücher, Hefter, Kopien, etc.

Hinweis: Verschafft Euch zunächst einen Überblick über alle Aufgaben und beginnt mit der Aufgabe, die Euch am wenigsten aufwändig erscheint.

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*

Es seien $P = \{p, q\}$ eine Menge von Aussagensymbolen und $\varphi, \psi \in \text{Form}(P)$. Gib **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

Behauptung	wahr?	falsch?
Wenn φ eine Tautologie ist, so gilt $\emptyset \vdash_R \varphi$ für alle vollständigen Hilbertkalküle $(R, \vdash_R)$.		
Ist S eine Klauselrepräsentation von φ und ist aus S die leere Klausel beweisbar, so ist φ erfüllbar.		
Ist $\varphi \to \psi$ eine Kontradiktion, so gilt $\varphi \vdash_R \psi$ in keinem korrekten Hilbertkalkül.		
Die Vereinigung zweier Junktorbasen ist eine Junktorbasis.		
$\varphi \to \psi$ ist tautologisch genau dann, wenn $\varphi \vdash_R \psi$ für jeden vollständigen und korrekten Hilbertkalkül.		
Gilt $\text{Symb}(\varphi) \cap \text{Symb}(\psi) = \emptyset$ und sind φ und ψ beide erfüllbar, aber nicht tautologisch, so ist $\varphi \to \psi$ eine Tautologie.		
Für jedes φ existiert ein ψ in DNF mit $\varphi \equiv \psi$.		
Sei S_φ eine Klauselrepräsentation einer Formel φ. Lassen sich aus S_φ Klauseln der Form $\{p, \neg p\}$ resolvieren, so sagt die Existenz solcher Klauseln nichts über die Gültigkeit von φ aus (φ kann also sowohl kontradiktorisch als auch erfüllbar sein).		

Aufgabe 2 *(6+2 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen sowie $p, q \in P$.

(a) Betrachte die Formel
$$\varphi = ((\top \to p) \to \neg(q \to \bot)) \to \bot.$$
Gib sowohl eine disjunktive Normalform (DNF) als auch eine konjunktive Normalform (KNF) für φ an und weise jeweils nach, dass die Normalform wirklich logisch äquivalent zu φ ist. Als Nachweis reichen hierbei entsprechende Äquivalenzumformungen oder auch eine Wahrheitstafel mit entsprechender Zeilenmarkierung.

(b) Entscheide, ob die folgenden Formeln in DNF, in KNF oder in DNF und KNF zugleich sind. Bei diesem Aufgabenteil werden für falsche Antworten *keine* Punkte abgezogen.

$$\chi_1 = (p \wedge \neg r \wedge \neg p \wedge r)$$

$$\chi_2 = \perp \wedge (p \vee q)$$

Aufgabe 3 *(3 Punkte)*

Es seien $\psi, \varphi, \chi \in \text{Form}(P)$. Beweise oder widerlege (durch Angabe eines Gegenbeispiels) die folgende Behauptung:

Falls $\varphi \Vdash \psi \vee \chi$, so auch $\varphi \Vdash \psi$ oder $\varphi \Vdash \chi$.

Aufgabe 4 *(3+2+3+2 Punkte)*

Es seien $\psi, \varphi, \in \text{Form}(P)$ sowie $p, q \in P$.

(a) Beweise oder widerlege (durch Angabe eines Gegenbeispiels) die folgende Behauptung:

$$\neg(\varphi \to \psi) \Vdash \psi \to \varphi.$$

(b) Ist die folgende Hilbertregel korrekt? Begründe deine Antwort schlüssig (verwende dabei (a)).

$$\frac{\neg(\varphi \to \psi)}{\psi \to \varphi}$$

(c) Angenommen, für einen Hilbertkalkül $(R, \vdash_R)$ gilt

$$\neg(\varphi \to \psi) \vdash_R \psi \to \varphi.$$

Kann $(R, \vdash_R)$ korrekt sein? Kann $(R, \vdash_R)$ vollständig sein? Begründe deine Antwort schlüssig (verwende dabei (a)).

(d) Überprüfe bitte nachstehende Folgerung mit Hilfe des Resolutionsverfahrens:

$$\neg(p \to q) \Vdash q \to p$$

.

Aufgabe 5 *(4 Punkte)*

Es seien $\Sigma = (S, OP, R)$ eine logische Signatur, X eine zu Σ passende Familien von Variablenmengen, $x \in X$, $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$ sowie $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{Form}_\Sigma(X)$. Gib **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

Behauptung	wahr?	falsch?
Die Theorie $\mathrm{Th}_\Sigma(\mathrm{Mod}_\Sigma(\Phi))$ ist stets identisch mit $\mathrm{Th}_\Sigma(\Phi)$.		
Gilt $\varphi \Vdash \psi$, so ist $\varphi \to \psi$ stets tautologisch.		
Sind φ und ψ Sätze mit $\varphi \Vdash \psi$, so ist $\varphi \to \psi$ stets tautologisch.		
Wenn $\varphi \Vdash \psi$, dann gilt $\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) \subseteq \mathrm{Mod}_\Sigma(\psi)$.		
Ist φ kontradiktorisch, so gilt $\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) = \emptyset$.		
Ist φ kontradiktorisch, so gilt stets für alle $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$ und alle $\beta : X \to A$, dass $(A, \beta) \not\models \varphi$.		
Es gilt $\mathrm{Strukt}_\Sigma \setminus \mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) = \mathrm{Mod}_\Sigma(\neg\varphi)$, wenn φ ein Satz ist.		
Für alle φ gilt $\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) \cap \mathrm{Mod}_\Sigma(\neg\varphi) = \emptyset$		

Aufgabe 6 *(9 Punkte)*

Gegeben sei die Signatur $\Sigma = (S, OP, R)$, wobei $S = \{s\}$, $OP = \{c,\ f\}$ mit $c :\rightarrow s$, $f : s \rightarrow s$ sowie $R = \{P\}$ mit $P : \langle ss \rangle$. Außerdem seien $x, y \in X_s$. Betrachte die folgenden Formeln φ_i, $i = 1, \ldots, 3$:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x. \exists y. f(x) = y, \\
\varphi_2 &= \forall x. f(x) = c, \\
\varphi_3 &= \forall x. f(c) = x,
\end{aligned}
$$

Überprüfe, ob die Formeln tautologisch, erfüllbar oder kontradiktorisch sind. Ist φ_i tautologisch, so beweise dies. Ist φ_i kontradiktorisch, so beweise dies. Ist φ_i erfüllbar, aber nicht tautologisch, so gib $\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi_i)$ sowie eine Struktur A_i an, in der φ_i **nicht** gültig ist.

Aufgabe 7 *(9 Punkte)*

Gegeben sei wieder die Signatur Σ aus der vorigen Aufgabe, also Σ mit $S = \{s\}$, $OP = \{c, f\}$ mit $c :\to s$, $f : s \to s$ sowie $R = \{P\}$ mit $P : \langle ss \rangle$. Außerdem seien $x, y \in X_s$. Überprüfe bitte, ob für die in der Tabelle angegebenen Σ-Formeln jeweils $\varphi \Vdash \psi$ gilt. Wenn die Folgerung gilt, so trage in die Tabelle **ja** ein. Gilt die Folgerung nicht, so trage **nein** ein. Für jeden richtigen Eintrag gibt es einen Punkt, für jeden falschen wird ein Punkt abgezogen. Fehlende Einträge werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es auf diese Teilaufgabe aber mindestens null Punkte.

$\varphi \Vdash \psi$		ψ: $\forall x. f(c) \neq x$	ψ: $\forall x. f(x) \neq x$	ψ: $f(c) \neq c$
φ	$\forall x. f(c) \neq x$			
φ	$\forall x. f(x) \neq x$			
φ	$f(c) \neq c$			

Aufgabe 8 *(3 Punkte)*

Sei Σ eine Struktur mit Sorte s und $x, y \in X_s$. Formuliere bitte eine Formel φ, sodass die Modelle A von φ genau diejenigen Strukturen sind, bei denen die Trägermenge A_s genau zwei Elemente hat.