B. Mahr, L. Frantzen, D. Tidhar, T. Wieczorek WS 01/02

Nachklausur TheGI 3

9. April 2002

Name, Vorname: ______________________ Matr.-Nr.: ______________________

Übung im WS ______

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punkte:									

Klausurpunkte: **Klausurnote:**

Aufgabe 1 *(3 Punkte)*

Es seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $\varphi, \psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{Form}(P)$. Geben Sie **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

1. Wenn φ eine Tautologie ist, so gilt $\emptyset \vdash_R \varphi$ für alle vollständigen Sequenzenkalküle $(R, \vdash_R)$.
2. Wenn $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \not\Vdash \varphi$, so ist $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$ nicht allgemeingültig.
3. Ist φ eine Formel in DNF, so ist φ keinesfalls in KNF.
4. Wenn $\varphi \Vdash \psi$, so gilt stets $\neg\varphi \Vdash \neg\psi$.
5. Es gibt einen korrekten Hilbertkalkül, der nur eine Regel hat.
6. Ist S eine Klauselrepräsentation zu φ, aus der die leere Klausel beweisbar ist, so ist $\neg\varphi$ allgemeingültig.

Aufgabe 2 *(2+4 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $p, q \in P$.

(a) Ergänzen Sie die folgende Wahrheitstafel! Die Formel dieser Tafel φ ist mit Hilfe der Junktoren aus $\{\top, \bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ gebildet, und es ist $\mathrm{Symb}(\varphi) = \{p, q\}$.
In jede Lücke gehört nur **ein** Zeichen!

p	q	$(p$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots)$	$\ldots$	$\neg$	$(p$	$\ldots$	$q)$
T	T					F	F			
T	F	T			F	T	T			
F	T	F	F		T	T	T			
F	F		T			T	T			

(b) Sei φ die Formel, deren Wahrheitstafel in (a) zu vervollständigen war. Geben Sie sowohl eine disjunktive Normalform für φ als auch eine konjunktive Normalform an.

Aufgabe 3 *(3+4 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $p, q \in P$.

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe des Deduktionstheorems:

$$\{\neg(p \to \bot) \land q,\ (p \land q) \to \neg p\} \Vdash \neg p.$$

(b) Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $p, q, r \in P$. Überprüfen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens:

$$\{p \to q,\ q \lor r,\ (p \land q) \to r\} \Vdash r \to \neg(q \to p).$$

Aufgabe 4 *(3+3 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{Form}(P)$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen (bei Widerlegung reicht die Angabe eines Gegenbeispiels):

(a) Falls $\varphi \Vdash \bot$, so auch $\psi \Vdash \neg\varphi$.

(b) $\{\varphi \to \psi, \chi, \chi \to \psi\} \Vdash \varphi$.

Aufgabe 5 *(2 Punkte)*

Es seien $\Sigma = (S, OP, R)$ eine logische Signatur, X eine zu Σ passende Familien von Variablenmengen, $x \in X$, $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$ sowie $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{Form}_\Sigma(X)$. Geben Sie **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

1. Wenn $\varphi \Vdash \psi$, dann gilt $\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) \setminus \mathrm{Mod}_\Sigma(\psi) = \emptyset$.
2. Es gibt ein $\chi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$ mit $\mathrm{Free}(\chi) = \mathrm{Bound}(\chi)$.
3. Aus $\Phi \subseteq \Psi$ folgt $\mathrm{Mod}_\Sigma(\Phi) \subseteq \mathrm{Mod}_\Sigma(\Psi)$.
4. Es gilt $A \models \varphi$ genau dann, wenn $A \models \forall x.\varphi$.

Aufgabe 6 *(4+2+4 Punkte)*

Gegeben sei die folgende Signatur $BlocksWorld$:

$$\begin{array}{rcrl}
\textbf{sorts} & : & \multicolumn{2}{l}{block, color} \\
\textbf{opns} & : & d_i : & \to block \text{ für } i = 1, \ldots, 5 \\
 & & getColor : & block \to color \\
\textbf{rels} & : & OnFloor : & \langle block \rangle \\
 & & Upon : & \langle block, block \rangle \\
 & & Above : & \langle block, block \rangle
\end{array}$$

sowie die zu $BlocksWorld$ passenden Variablenmengen $X = (X_s)_{s \in \{block, color\}}$ mit $X_{block} = \{a, b, c, a_1, \ldots\}$ und $X_{color} = \{u, v, w, u_1, \ldots\}$.

(a) Geben Sie eine BlocksWorld-Struktur A an, in der die folgenden Formeln gültig sind:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= Above(a, c) \leftrightarrow (Upon(a, c) \lor \exists b.(Upon(a, b) \land Above(b, c))), \\
\varphi_2 &= \exists a.\exists b.(Upon(a, b)), \\
\varphi_3 &= \forall a.((\exists b.Upon(a, b)) \lor OnFloor(a)), \\
\varphi_4 &= Upon(a, b) \to (getColor(a) \neq getColor(b)).
\end{aligned}$$

(b) Beweisen Sie die Gültigkeit von φ_4 in Ihrer Struktur.

(c) Gegeben sei die Substitution $[\sigma]$ mit $\sigma(x) = d_1$ für alle $x \in X_{block}$ sowie $\sigma(u) = getColor(a)$, $\sigma(v) = getColor(b)$, $\sigma(w) = getColor(c)$ und $\sigma(u_i) = getColor(a_i)$ für alle $i \geq 1$. Geben Sie eine Formel φ an mit $a, u \in \text{Free}(\varphi)$ und $a, v \in \text{Bound}(\varphi)$, so dass $[\sigma]$ <u>nicht</u> zulässig für φ ist (und begründen Sie die Nicht-Zulässigkeit). Bestimmen Sie dann eine zulässige Umbenennung $\langle r \rangle$, so dass $[\sigma]$ zulässig für $\varphi\langle r \rangle$ ist, und geben Sie $\varphi\langle r \rangle[\sigma]$ an.

Aufgabe 7 *(2+2 Punkte)*

Gegeben sei die Signatur $\Sigma = (S, OP, R)$, wobei $S = \{s\}$, $OP = \{c, f\}$ mit $c :\to s$ und $f : s \to s$ sowie $R = \{P\}$ mit $P : \langle s \rangle$. Außerdem seien $x, y \in X_s$. Überprüfen Sie die folgenden Formeln auf Allgemeingültigkeit (Beweis oder Angabe eines Gegenbeispiels):

(a) $\varphi = (\exists x.(P(x) \land f(x) = c)) \to ((\exists x.P(x)) \land (\exists x.f(x) = c))$.

(b) $\psi = ((\exists x.P(x)) \land (\exists x.f(x) = c)) \to (\exists x.(P(x) \land f(x) = c))$.

Aufgabe 8 *(1,5+1,5+1 Punkte)*

Seien $\Sigma = (S, OP, R)$ und $s \in S$ sowie $X_s = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$.

(a) Formulieren Sie eine Formel φ, so dass die Modelle A von φ genau die Strukturen sind, für die die Trägermenge A_s mindestens zweielementig ist, also $|A_s| \geq 2$.

(b) Formulieren Sie eine Formel ψ, so dass die Modelle A von ψ genau die Strukturen sind, für die die Trägermenge A_s höchstens zweielementig ist, also $|A_s| \leq 2$.

(c) Formulieren Sie eine Formel χ, so dass die Modelle A von χ genau die Strukturen sind, für die die Trägermenge A_s genau zweielementig ist, also $|A_s| = 2$.

Aufgabe 9 *(2 Punkte)*

Sei $\Sigma = (S, OP, R)$ gegeben mit $S = \{s\}$ und $P \in R$ mit $P : \langle s \rangle$ sowie $X_s = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$. Geben Sie $\varphi, \psi \in \text{Form}_\Sigma(X)$ an, für welche $\text{Mod}_\Sigma(\varphi) = \text{Mod}_\Sigma(\psi)$ gilt, obwohl $\varphi \leftrightarrow \psi$ <u>nicht</u> allgemeingültig ist! Begründen Sie, warum φ und ψ das Gewünschte leisten.