B. Mahr, S. Bab, T. Wieczorek WS 06/07

# 1. Test TheGI 3

11. Dezember 2006

Version A

Name, Vorname: ____________________ Matr.-Nr.: ____________________

| Aufgabe: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte: | | | | | | | |

**Gesamtpunkte:** **/ 50** **Tutorium:**

**Bei allen Aufgaben wird die Notation aus Buch und Vorlesung gebraucht! Insbesondere sei im Folgenden $P$ eine Menge von Aussagensymbolen.**

**Aufgabe 1** *(6,5 Punkte)*

Seien $p, q \in P$. Untersuche mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens, ob die Formel $\varphi = (\bot \to p) \to (\neg q \leftrightarrow \top)$ erfüllbar, allgemeingültig oder kontradiktorisch ist und kreuze die richtigen Aussagen an.

| $p$ | $q$ | $(\bot \ \to \ p) \ \to \ (\neg \ q \ \leftrightarrow \ \top)$ |
|---|---|---|
| T | T | |
| T | F | |
| F | T | |
| F | F | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ ist erfüllbar | ☐ ja<br>☐ nein | $\varphi$ ist allgemeingültig | ☐ ja<br>☐ nein | $\varphi$ ist kontradiktorisch | ☐ ja<br>☐ nein |

**Aufgabe 2** *(4 Punkte)*

Betrachte die folgende Formel:

$$((\neg\bot \to (\top \vee \bot)) \to (\neg\top \wedge \top \leftrightarrow \bot)) \vee ((\bot \to \top) \leftrightarrow \bot \wedge \bot) \vee \neg(\neg\top \leftrightarrow (\bot \wedge \top \to \neg(\top \wedge \bot)))$$

Gibt es $B_1 : P \to \{T, F\}$ und $B_2 : P \to \{T, F\}$ mit $B_1 \models \psi$ und $B_2 \not\models \psi$? Begründe deine Antwort mit Hilfe des Koinzidenzlemmas.

**Aufgabe 3** *(10 Punkte)*

Seien $p, q \in P$. Gib bitte zu den folgenden Formeln je eine logisch äquivalente Formel in DNF und eine in KNF an!

| Formel | $DNF$ | $KNF$ |
|---|---|---|
| $\neg\neg\neg\neg p$ | | |
| $p \to \neg p$ | | |
| $p \leftrightarrow q$ | | |
| $\neg p \to q$ | | |
| $\bot \to p$ | | |

**Aufgabe 4** *(2+3 Punkte)*

(a) Was ist ein wichtiger Unterschied zwischen der Folgerelation "$\Vdash$" und der Implikation "$\to$"?

(b) Wie heißt das Theorem, das den Zusammenhang zwischen "$\Vdash$" und "$\to$" beschreibt? Formuliere dieses Theorem für den Fall $\varphi \Vdash \psi$, wobei $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}(P)$.

**Aufgabe 5** *(12,5 Punkte)*

Seien $p, q \in P$. Überprüfe bitte, ob für die in der Tabelle angegebenen Formeln jeweils $\varphi \Vdash \psi$ gilt. Wenn die Folgerung gilt, so trage in die Tabelle **ja** ein. Gilt die Folgerung nicht,so trage **nein** ein. Für jeden richtigen Eintrag gibt es einen halben Punkt, für jeden falschen wird ein halber Punkt abgezogen. Fehlende Einträge werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es auf diese Teilaufgabe aber mindestens null Punkte.

| $\varphi \Vdash \psi$ | | $\psi$: $\bot$ | $\top$ | $p$ | $p \vee q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | $\bot$ | | | | | |
| | $\top$ | | | | | |
| | $p$ | | | | | |
| | $p \vee q$ | | | | | |
| | $p \wedge q$ | | | | | |

**Aufgabe 6** *(6 Punkte)*

Es seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}(P)$ und $\Phi \subseteq \mathrm{Form}(P)$.Gib bitte **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

| Behauptung | wahr? | falsch? |
|---|---|---|
| Sind $\varphi$ und $\psi$ tautologisch, so gilt $\varphi \equiv \psi$. | | |
| Sind $\varphi$ und $\psi$ erfüllbar, so gilt $\varphi \equiv \psi$. | | |
| Ist $A$ eine Junktorbasis und $\otimes$ ein Junktor, so ist $A \cup \{\otimes\}$ auf jeden Fall eine Junktorbasis. | | |
| Ist $A$ eine Junktorbasis und $\otimes$ ein Junktor, so ist $A \setminus \{\otimes\}$ auf keinen Fall eine Junktorbasis. | | |
| Sei $(\mathsf{R}, \vdash_{\mathsf{R}})$ ein Hilbertkalkül.<br>Für alle $\Phi$ und alle $\varphi$ gelte $\Phi \Vdash \varphi \Rightarrow \Phi \vdash_{\mathsf{R}} \varphi$.<br>Dann ist $\mathsf{R}$ vollständig. | | |
| Sei $(\mathsf{R}, \vdash_{\mathsf{R}})$ ein Hilbertkalkül.<br>Für alle $\Phi$ und alle $\varphi$ gelte $\Phi \vdash_{\mathsf{R}} \varphi \Rightarrow \Phi \Vdash \varphi$.<br>Dann ist $\mathsf{R}$ korrekt. | | |

**Aufgabe 7** *(3+3 Punkte)*

Sei $(\mathsf{R}, \vdash_{\mathsf{R}})$ ein Hilbertkalkül, der vollständig und korrekt ist. Welche dieser beiden Eigenschaften (also Vollständigkeit, Korrektheit) geht möglicher Weise verloren und welche bleibt auf jeden Fall erhalten, wenn

(a) aus $\mathsf{R}$ eine Regel $\varrho$ entfernt wird?

(b) zu $\mathsf{R}$ eine Regel $\varrho$ hinzugenommen wird?

Begründe deine Antwort.

zu (a):

zu (b):