Modul „TheGI 4: Spezifikation und Semantik“

Veranstalter: Hartmut Ehrig, Julia Padberg, Benjamin Braatz, Ulrike Prange

Sommersemester 2008

Klausur
am 9. Oktober 2008

- Bei der Klausur sind 100 Punkte erreichbar. Wer 50 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden.
- Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist ein handbeschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Haltet bitte einen Ausweis mit Lichtbild (Personalausweis, Pass, Führerschein, Studentenausweis) bereit.
- Schreibt nicht mit Bleistift oder Rotstift. Das wird nicht bewertet.
- Die Signaturen, Algebren und Petrinetze, auf die sich die Aufgaben beziehen, befinden sich alle auf dem letzten Blatt der Klausur, das abgetrennt werden kann.
- Zusätzliches Papier steht auf Anfrage zur Verfügung.

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studiengang:

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
Punkte	10	6	29	5	10	11	7	11	11	100
Erreicht										
Korrektor										

Algebraische Spezifikation

Aufgabe 1 — 10 Punkte

Diese Aufgabe bezieht sich auf die Spezifikation $SP_1 = (\Sigma_1, E_1)$ und die Algebren A und B auf Seite 14.
Entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und kreuzt entsprechend an! Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen, wobei es jedoch minimal 0 Punkte für die ganze Aufgabe gibt.

	Aussage	**wahr**	**falsch**
1.	$\texttt{op1}(\texttt{c1}, \texttt{c2}) = \texttt{op1}(\texttt{op2}(\texttt{op1}(\texttt{c1}, \texttt{c2})), \texttt{c2})$ ist eine Grundgleichung.		
2.	Es gibt einen Homomorphismus $g\colon A \to B$.		
3.	Es gibt einen Homomorphismus $h\colon B \to A$.		
4.	Es gibt einen surjektiven Homomorphismus $e\colon T_{\Sigma_1} \to A$.		
5.	Die Gleichungen a und b sind in A gültig.		
6.	Es gibt Algebren, in denen a gültig ist und b nicht.		
7.	Es gibt Algebren, in denen b gültig ist und a nicht.		
8.	Es gilt $\mathit{INIT}(SP_1) \subseteq \mathit{MOD}(SP_1)$.		
9.	Sei X eine SP_1-Algebra, Y eine beliebige Σ_1-Algebra und $g\colon X \to Y$ ein surjektiver Homomorphismus, dann ist Y in jedem Fall auch eine SP_1-Algebra.		
10.	Sei $\sim$ eine beliebige Kongruenzrelation auf der Algebra A, dann erfüllt auch die Quotientenalgebra $A/\!\sim$ die Spezifikation SP_1.		

Für die folgenden Aufgaben sind die Spezifikation $SP_2 = (\Sigma_2, E_2)$ und die SP_2-Modellalgebra M auf Seite 14 gegeben.

Aufgabe 2 — 6 Punkte

Ergänzt die Termalgebra T_{Σ_2}!

$T_{\Sigma_2,\texttt{bool}} =$ ....

$T_{\Sigma_2,\texttt{fifo}} =$ ....

....

$\texttt{w}_{T_{\Sigma_2}} \in T_{\Sigma_2,\texttt{bool}}$, $\texttt{w}_{T_{\Sigma_2}} =$ ....

$\texttt{f}_{T_{\Sigma_2}} \in T_{\Sigma_2,\texttt{bool}}$, $\texttt{f}_{T_{\Sigma_2}} =$ ....

$\texttt{leer}_{T_{\Sigma_2}} \in T_{\Sigma_2,\texttt{fifo}}$, $\texttt{leer}_{T_{\Sigma_2}} =$ ....

$\texttt{rein}_{T_{\Sigma_2}} : T_{\Sigma_2,\texttt{bool}} \times T_{\Sigma_2,\texttt{fifo}} \to T_{\Sigma_2,\texttt{fifo}}$, $(x, y) \mapsto$ ....

$\texttt{raus}_{T_{\Sigma_2}} : T_{\Sigma_2,\texttt{fifo}} \to T_{\Sigma,\texttt{fifo}}$, $y \mapsto$ ....

Aufgabe 3 **29 Punkte**

Wir wollen zeigen, dass SP_2 initial korrekt bezüglich der Algebra M ist. Vervollständigt hierzu den folgenden Beweis mit schrittweiser Korrektheit!

Wahl der Spezifikation $SP' \subseteq SP_2$:

Wir wählen die Spezifikation $SP' = (\Sigma', E') \subseteq SP_2$ so, dass sie nur frei erzeugende Operationen enthält, also:

$SP' =$

sorts: `bool`, `fifo`

opns: ....

....

....

....

vars: ....

eqns: ....

SP' initial korrekt bezüglich $M|_{SP'}$:

Da die Spezifikation SP' keine Gleichungen enthält ist die Repräsentantenalgebra R gleich der Termalgebra $T_{\Sigma'}$. Es bleibt zu zeigen, dass die Termauswertung $\mathrm{eval}(M)\colon T_{\Sigma'} \to M$ bijektiv ist:

Injektivität:

Seien $s, s' \in T_{\Sigma',\texttt{bool}}$ mit $\mathrm{eval}(M)_{\texttt{bool}}(s) = b = \mathrm{eval}(M)_{\texttt{bool}}(s')$.

. . . .

. . . .

Seien $s, s' \in T_{\Sigma',\texttt{fifo}}$ mit $\mathrm{eval}(M)_{\texttt{fifo}}(s) = w = \mathrm{eval}(M)_{\texttt{fifo}}(s')$.
Induktion über die Länge von w:
Induktionsanfang: $|w| = 0$

. . . .

. . . .

Induktionsvoraussetzung:
Für ein Wort v der Länge $|v| = n$ und Terme $r, r' \in T_{\Sigma',\texttt{fifo}}$ mit $\mathrm{eval}(M)_{\texttt{fifo}}(r) = v = \mathrm{eval}(M)_{\texttt{fifo}}(r')$ gilt $r = r'$.
Induktionsschritt: $|w| = n + 1$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Surjektivität:

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Sortengleichheit:

Die Sorten von SP' und SP_2 sind offensichtlich gleich.

M **erfüllt** $E_2 \setminus E'$**:**

Gleichung ①**:**

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Gleichung ②**:**

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Gleichung ③**:**

$SP' \subseteq SP_2$ ist vollständige Erweiterung:

Es ist zu zeigen, dass für alle $s \in T_{\Sigma_2}$ ein $s' \in T_{\Sigma'}$ mit $s \sim_{E_2} s'$ existiert. Dies zeigen wir mit struktureller Induktion.

Induktionsanfang:

$s = \texttt{w}$: ....

$s = \texttt{f}$: ....

$s = \texttt{leer}$: ....

Induktionsvoraussetzung:

Für $p \in T_{\Sigma_2,\texttt{bool}}$ existiert ein $p' \in T_{\Sigma',\texttt{bool}}$ mit $p \sim_{E_2} p'$.
Für $r \in T_{\Sigma_2,\texttt{fifo}}$ existiert ein $r' \in T_{\Sigma',\texttt{fifo}}$ mit $r \sim_{E_2} r'$.

Induktionsschritt:

$s = \texttt{rein}(p, r)$: ....

$s = \texttt{raus}(r)$: ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Damit sind alle Bedingungen des Satzes zur schrittweisen Korrektheit erfüllt und SP_2 ist initial korrekt bezüglich M. □

Aufgabe 4 **5 Punkte**

Es soll nun ein Operationssymbol $\mathtt{sund}\colon \mathtt{fifo} \to \mathtt{bool}$ hinzugefügt werden. Die Operation soll die Konjunktion („Verundung") aller Wahrheitswerte in der Warteschlange berechnen. Ihre Interpretation in der Algebra M ist also $\mathtt{sund}_M\colon M_{\mathtt{fifo}} \to M_{\mathtt{bool}}$ mit

$$\mathtt{sund}_M(x_1.\dots.x_n) = \begin{cases} \checkmark & \text{, falls } x_i = \checkmark \text{ für alle } i \in \{1,\dots,n\} \text{ gilt,} \\ \lightning & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Spezifiziert diese Operation durch eine geeignete Menge an Gleichungen!

....

....

....

....

....

Petrinetze

Die folgenden Aufgaben 5, 6 und 7 beziehen sich auf das Netz N_1 und die Markierungen M_1 und M_2 auf Seite 15.

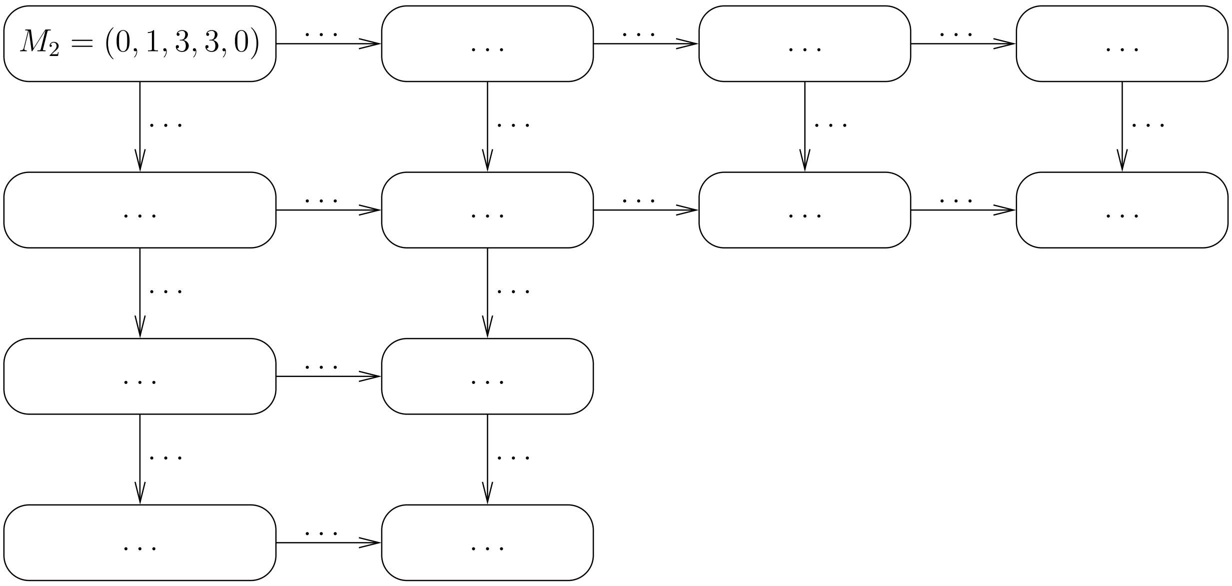
Aufgabe 5 **10 Punkte**

Entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und kreuzt entsprechend an! Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen, wobei es jedoch minimal 0 Punkte für die ganze Aufgabe gibt.

	Aussage	**wahr**	**falsch**
1.	t_2 und t_4 sind bezüglich M_1 im Konflikt.		
2.	t_2 und t_4 sind bezüglich M_2 im Konflikt.		
3.	Das Netz (N_1, M_1) ist lebendig.		
4.	Das Netz (N_1, M_1) ist beschränkt.		
5.	Unter M_1 ist die Schaltfolge $M_1 \xrightarrow{t_4} M_3 \xrightarrow{t_3} M_4 \xrightarrow{t_2} M_5 \xrightarrow{t_1} M_6$ möglich.		
6.	$I_\mathrm{p}\colon P \to \mathbb{Z}$ mit $(I_\mathrm{p}(p_1), \ldots, I_\mathrm{p}(p_5)) = (1, 1, 0, 1, 0)$ ist eine P-Invariante von N_1.		
7.	$I_\mathrm{t}\colon T \to \mathbb{N}$ mit $(I_\mathrm{t}(t_1), \ldots, I_\mathrm{t}(t_4)) = (1, 1, 2, 0)$ ist eine T-Invariante von N_1.		
8.	Für die Kausalrelation $<_\mathrm{k}$ gilt: $p_4 <_\mathrm{k} p_1$		
Sei (N, M) ein P/T-Netz mit Netzkomplementierung (N', M').			
9.	Wenn t_1 in N' unter M' aktiviert ist, dann ist t_1 auch in N unter M aktiviert.		
10.	Die entsprechenden Markierungsgraphen MG und MG' sind isomorph.		

Aufgabe 6 **11 Punkte**

Ergänzt den folgenden Erreichbarkeitsgraphen von (N_1, M_2)! Gebt also die jeweils schaltenden Transitionen an und berechnet die resultierenden Markierungen, die Ihr analog zu der gegebenen Markierung M_2 in der Form $(M(p_1), \dots, M(p_5))$ angeben könnt.



Aufgabe 7 **7 Punkte**

Gebt die Netzkomplementierung (N_1', M_1') des Netzes (N_1, M_1) an!

Die folgenden Aufgaben 8 und 9 beziehen sich auf das Netz N_2 (mit unbeschränkten Kapazitäten) auf Seite 15.

Aufgabe 8 **11 Punkte**

a) Ergänzt die folgende Matrix-Darstellung $\underline{N_2}$ von N_2!

$\underline{N_2} = (P, T, \underline{pre}, \underline{post})$ mit

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$

$T = \{t_1, t_2, t_3\}$

$$\underline{pre} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\underline{post} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

b) Berechnet die P-Invarianten von $\underline{N_2}$!

Aufgabe 9 **11 Punkte**

a) Gebt (visualisiert) ein Prozessnetz von N_2 für das Schalten der Transitionen t_2, t_3 und t_1 unter der Anfangsmarkierung M mit $M(p_1) = 4$, $M(p_2) = 0$, $M(p_3) = 0$ und $M(p_4) = 0$ an!

b) Gebt die nebenläufigen Transitionen dieses Prozesses an!

....

....

c) Gebt alle mit der Kausalrelation des Prozessnetzes verträglichen totalen Ordnungen der Transitionen an!

....

....

Signaturen und Algebren

Für Aufgabe 1:

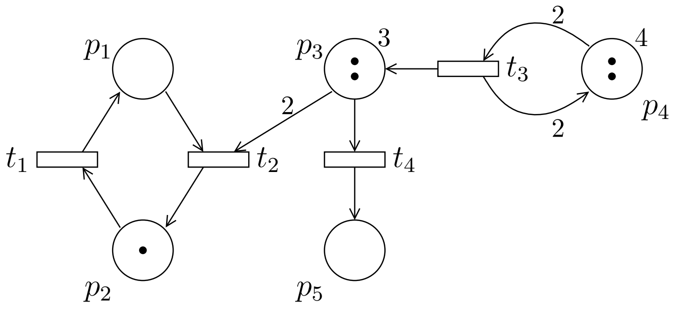
$$
\begin{array}{lll}
SP_1 = & A & B \\
\text{sorts:}\ \mathtt{x} & A_{\mathtt{x}} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\} & B_{\mathtt{x}} = \{1\} \\
\qquad\ \ \mathtt{y} & A_{\mathtt{y}} = \{\mathrm{e}, \mathrm{f}, \mathrm{g}\} & B_{\mathtt{y}} = \{99, 100\} \\
\text{opns:}\ \mathtt{c1}\colon \to \mathtt{x} & \mathtt{c1}_A = \mathrm{c} \in A_{\mathtt{x}} & \mathtt{c1}_B = 1 \in B_{\mathtt{x}} \\
\qquad\ \ \mathtt{c2}\colon \to \mathtt{x} & \mathtt{c2}_A = \mathrm{d} \in A_{\mathtt{x}} & \mathtt{c2}_B = 1 \in B_{\mathtt{x}} \\
\qquad\ \ \mathtt{op1}\colon \mathtt{x}\,\mathtt{x} \to \mathtt{y} & \mathtt{op1}_A\colon A_{\mathtt{x}} \times A_{\mathtt{x}} \to A_{\mathtt{y}} & \mathtt{op1}_B\colon B_{\mathtt{x}} \times B_{\mathtt{x}} \to B_{\mathtt{y}} \\
 & (v_1, v_2) \mapsto \begin{cases} \mathrm{e} & \text{, falls } v_1 = v_2 \\ \mathrm{f} & \text{, sonst} \end{cases} & (v_1, v_2) \mapsto 100 \text{ für alle } v_1 \text{ und } v_2 \\
\qquad\ \ \mathtt{op2}\colon \mathtt{y} \to \mathtt{x} & \mathtt{op2}_A\colon A_{\mathtt{y}} \to A_{\mathtt{x}} & \mathtt{op2}_B\colon B_{\mathtt{y}} \to B_{\mathtt{x}} \\
 & v \mapsto \begin{cases} \mathrm{a} & \text{, falls } v = \mathrm{g} \\ \mathrm{b} & \text{, sonst} \end{cases} & v \mapsto 1 \text{ für alle } v \\
\text{vars:}\ \mathtt{x1}, \mathtt{x2}\colon \mathtt{x} & & \\
\text{eqns:}\ (\mathrm{a})\ \mathtt{op1}(\mathtt{c1}, \mathtt{c2}) = \mathtt{op1}(\mathtt{c2}, \mathtt{c1}) & & \\
\qquad\ \ (\mathrm{b})\ \mathtt{op1}(\mathtt{x1}, \mathtt{x2}) = \mathtt{op1}(\mathtt{x2}, \mathtt{x1}) & &
\end{array}
$$

Für Aufgaben 2, 3 und 4:

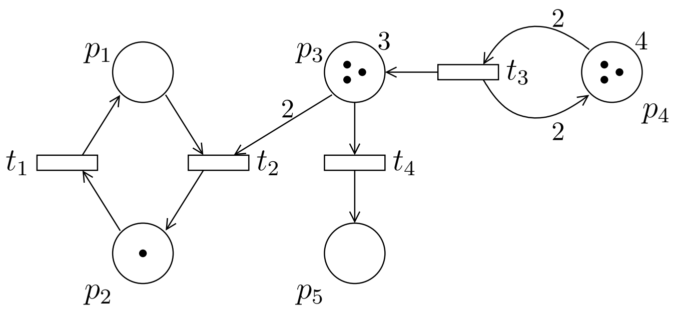
$$
\begin{array}{ll}
SP_2 = & M \\
\text{sorts:}\ \mathtt{bool} & M_{\mathtt{bool}} = \{\lightning, \checkmark\} \\
\qquad\ \ \mathtt{fifo} & M_{\mathtt{fifo}} = \{\lightning, \checkmark\}^* \\
\text{opns:}\ \mathtt{w}\colon \to \mathtt{bool} & \mathtt{w}_M = \checkmark \in M_{\mathtt{bool}} \\
\qquad\ \ \mathtt{f}\colon \to \mathtt{bool} & \mathtt{f}_M = \lightning \in M_{\mathtt{bool}} \\
\qquad\ \ \mathtt{leer}\colon \to \mathtt{fifo} & \mathtt{leer}_M = \lambda \in M_{\mathtt{fifo}} \\
\qquad\ \ \mathtt{rein}\colon \mathtt{bool}\ \mathtt{fifo} \to \mathtt{fifo} & \mathtt{rein}_M\colon M_{\mathtt{bool}} \times M_{\mathtt{fifo}} \to M_{\mathtt{fifo}} \\
 & (x, w) \mapsto x.w \\
\qquad\ \ \mathtt{raus}\colon \mathtt{fifo} \to \mathtt{fifo} & \mathtt{raus}_M\colon M_{\mathtt{fifo}} \to M_{\mathtt{fifo}} \\
 & w \mapsto \begin{cases} \lambda & \text{, falls } w = \lambda \\ w' & \text{, falls } w = w'.x, w' \in M_{\mathtt{fifo}}, x \in M_{\mathtt{bool}} \end{cases} \\
\text{vars:}\ \mathtt{b}, \mathtt{c}\colon \mathtt{bool}, \mathtt{s}\colon \mathtt{fifo} & \\
\text{eqns:}\ (1)\ \mathtt{raus}(\mathtt{leer}) = \mathtt{leer} & \\
\qquad\ \ (2)\ \mathtt{raus}(\mathtt{rein}(\mathtt{b}, \mathtt{leer})) = \mathtt{leer} & \\
\qquad\ \ (3)\ \mathtt{raus}(\mathtt{rein}(\mathtt{b}, \mathtt{rein}(\mathtt{c}, \mathtt{s}))) = \mathtt{rein}(\mathtt{b}, \mathtt{raus}(\mathtt{rein}(\mathtt{c}, \mathtt{s}))) &
\end{array}
$$

Petrinetze

Für Aufgaben 5, 6 und 7:



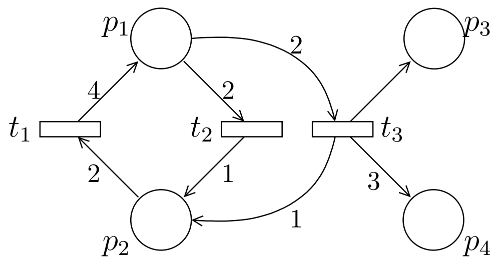
(N_1, M_1)



(N_1, M_2)

Kanten ohne Beschriftung haben ein Gewicht von 1 und Stellen ohne Beschriftung eine Kapazität von ω.

Für Aufgaben 8 und 9:



N_2