B. Mahr WS 05/06

Probeklausur TheGI-TI

19. Januar 2006

Bei allen Aufgaben wird die Notation aus Buch und Vorlesung gebraucht!

Vorbemerkung Auf dieser Probeklausur befinden sich Aufgaben, die so, oder so ähnlich, in der richtigen Klausur gestellt werden. Bitte beachtet, dass diese Probeklausur wesentlich umfangreicher ist, als die tatsächliche Klausur sein wird (damit ihr mehr zum Üben habt). Viel Erfolg (und hoffentlich auch etwas Spaß) bei der Vorbereitung!

Aufgabe 1 *(? Punkte)*

Vervollständige bitte folgenden Lückentext geeignet. Dabei sind die Worte *Mächtigkeit, endlich, abzählbar unendlich* und *überabzählbar* zu verwenden!

Lückentext: Ein Alphabet Σ ist eine ____________, nicht leere Menge. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist Σ^n die Menge der Zeichenreihen über Σ der Länge n. Auch diese Menge ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ ____________. Σ^* ist die Menge aller Zeichenreihen, diese Menge ist ______________. Eine Sprache L ist eine Teilmenge von Σ^*. Solch eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist also ____________ oder ______________. Die Menge aller Sprachen über Σ ist somit $\mathcal{P}(\Sigma^*)$, die Potenzmenge von Σ^*. Da die ____________ einer Potenzmenge stets größer ist als die ____________ der Menge, über die die Potenzmenge gebildet wurde, gibt es ______________ viele Sprachen über Σ.

Für die weiteren Aufgaben sei das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ vorgegeben.

Aufgabe 2 *(? Punkte)*

Vervollständige bitte die folgenden Aussagen, sodass sie korrekt sind, durch die Zeichen $\in$, $\notin$, $=$ bzw. $\subseteq$. Sind mehrere Lösungen möglich, reicht die Angabe einer Lösung.

a		Σ	Σ^1		Σ	ε		Σ^+	ε		Σ^*
$\emptyset$		Σ^+	$\emptyset$		Σ^*	a		Σ^*	$\{\varepsilon\}$		Σ^*
Σ^2		Σ^*	$\emptyset$		$\mathcal{P}(\Sigma^*)$	$\{\varepsilon\}$		$\mathcal{P}(\Sigma^*)$	Σ^2		$\mathcal{P}(\Sigma^*)$

$\{aa, bb, ab, ba\}$		Σ^2	$\{xab : x \in \Sigma^*\}$		$\{x \in \Sigma^* : x \text{ endet mit } ab\}$
$\{ab, bb, aba\}$		Σ^*	$\{axab : x \in \Sigma^*\}$		$\{x \in \Sigma^* : x \text{ endet mit } ab\}$

Aufgabe 3 *(? Punkte)*

Beschreibe bitte, wie die folgenden Mengen formal aussehen. Falls sie endlich sind, gib bitte die Menge explizit an!

1. $\{ax : x \in \Sigma^*\} \cap \{xb : x \in \Sigma^*\} =$
2. $\{ax : x \in \Sigma^*\} \cup \{bx : x \in \Sigma^*\} =$
3. $\{ax : x \in \Sigma^*\} \cup \{bx : x \in \Sigma^*\} \cup \{\varepsilon\} =$
4. $\Sigma^* \setminus \{ax : x \in \Sigma^*\} =$
5. $\mathcal{P}(\Sigma) =$
6. $\Sigma \times \Sigma =$

Aufgabe 4 *(? Punkte)*

Gib bitte einen deterministischen endlichen Automaten (DEA) $A1$ an, der die folgende Sprache erkennt:

$$L_1 = \{x \in \Sigma^* : \text{ in } x \text{ kommt a mindestens einmal vor}\}$$

Dabei reicht es, das Übergangsdiagramm zu erstellen.

Aufgabe 5 *(? Punkte)*

Betrachte den folgenden DEA $A2$:

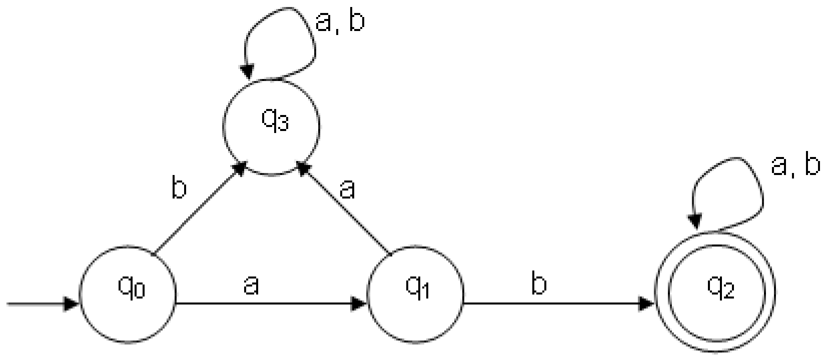

Abbildung 1: Automat $A2$

(a) Welche Sprache $L_2 = L(A2)$ wird von $A2$ erkannt?

(b) Gib bitte die Übergangstabelle von $A2$ an.

(c) Konstruiere bitte einen Automaten $C(A2)$, der das Komplement von L_2 erkennt.

Aufgabe 6 *(? Punkte)*

Betrachte folgenden DEA $A3$ und verfahre wie in Aufgabe 5:

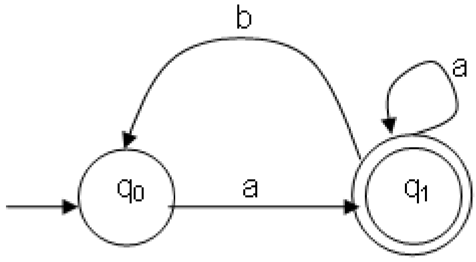

Abbildung 2: Automat $A3$

Aufgabe 7 *(? Punkte)*

Betrachte folgenden nichtderministischen endlichen Automaten (NEA) $A4$:

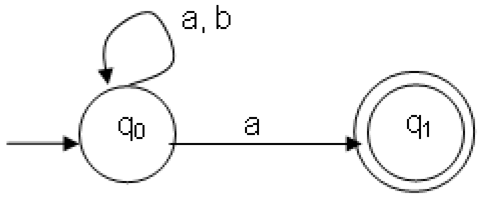

Abbildung 3: Automat $A4$

(a) Welche Sprache $L_4 = L(A4)$ wird erkannt?

(c) Gib bitte die Übergangstabelle an.

(b) Konstruiere bitte aus $A4$ einen DEA, der L_4 erkennt.

Aufgabe 8 *(? Punkte)*

Betrachte die folgenden regulären Ausdrücke über Σ:

1. $E_1 = (a^*b^*)^*a(a^*b^*)^*$
2. $E_2 = a(a^*b^*)^* + (a^*b^*)^*b$
3. $E_3 = (aa + bb)^*$
4. $E_4 = (\varepsilon + \emptyset + ab)^*$
5. $E_5 = \varepsilon^*$

Gib bitte für jedes $i = 1, \ldots, 5$ die Sprache $L(E_1)$ an, die von E_i erzeugt wird.

Aufgabe 9 *(? Punkte)*

Betrachte die folgenden Sprachen:

1. $S_1 = \{x \in \Sigma^* :$ in x kommt der String aab vor$\}$.
2. $S_1 = \{x \in \Sigma^* : x$ beginnt mit $aab\}$
3. $S_1 = \{x \in \Sigma^* : x$ ist Iteration des Strings aab$\}$

Gib bitte reguläre Ausdrücke F_i, $i = 1, 2, 3$ an mit $L(F_i) = S_i$.

Aufgabe 10 *(? Punkte)*

Seien R und S regüläre Ausdrücke. Überprüfe bitte die folgenden Identiäten.

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & R+S & = & S+R \\
(2) & RS & = & SR \\
(3) & (RS)^* & = & (R^*S^*)^* \\
(4) & (R+S)^* & = & (R^*+S^*)^*
\end{array}$$

Aufgabe 11 *(? Punkte)*

Betrachte das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen:

Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Konstante n (die von L abhängt), sodass für jede Zeichenreihe w in L mit $|w| \geq n$ gilt, dass wir w in drei Zeichenreihen $w = xyz$ zerlegen können, für die gilt:

1. $y \neq \varepsilon$,
2. $|xy| \leq n$,
3. *Für alle $k \geq 0$ gilt, dass die Zeichenreihe xy^kz auch in L enthalten ist. Das n bezeichnen wir als* Pumping-Zahl.

Aufgabe: Skizziere bitte den Beweis des Pumping-Lemmas.
Ansatz: Sei L regulär und sei A ein DEA mit $L = L(A)$. A habe n Zustände. Betrachte ein Wort w von L, das von der Länge $\geq n$, etwa $w = a_1, \ldots, a_m$ mit $m \geq n$. Das Wort w kann wie folgt zerlegt werden: ...

Aufgabe 12 *(? Punkte)*

Betrachte den DEA $A2$ aus Aufgabe 5.

(a) Gib eine geeignete Pumping-Zahl für L_2 an.

(b) Gib ein Wort $w \in L$ an, das von der Länge her $\geq$ der in (a) angegebenen Pumping-Zahl ist und zerlege w geeignet gemäß des Lemmas in $w = xyz$. Gib dann xy^3z an.

Aufgabe 13 *(? Punkte)*

Beweise bitte mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass $L = \{a^m ba^m : m \geq 1\}$ keine reguläre Sprache ist.
Ansatz: Angenommen, L ist regulär. Dann existiert eine Pumping-Zahl n für L. Betrachte nun $w = a^n ba^n \ldots$

Aufgabe 14 *(? Punkte)*

Betrachte die Grammatik mit den Regeln

$$S \rightarrow aS|aSbS|\varepsilon$$

Diese Grammatik ist mehrdeutig. Betrachte das Wort $w = aaabb$, das mit dieser Grammatik erzeugt werden kann.

(a) Gib zwei verschiedene Ableitungsbäume (Parsebäume) für w an.

(b) Gib zwei verschiedene Linksableitungen für w an.

(c) Gib zwei verschiedene Rechtsableitungen für w an.

Aufgabe 15 *(?? Punkte)*

Bitte ergänze die folgende Darstellung der Chomsky-Hierarchie durch Ausfüllen aller gepunkteten Lücken um die Typ-Nummern der einzelnen Sprachklassen sowie die Worte: *allgemein*, *kontextfrei*, *kontextsensitiv* und *regulär*.

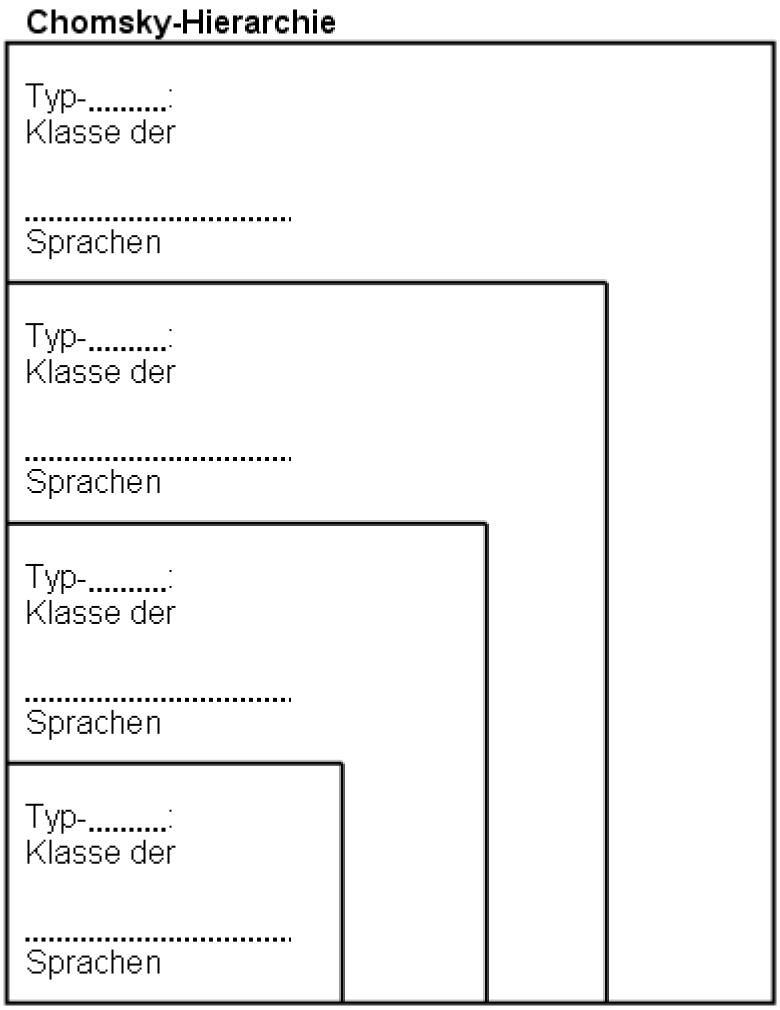

Abbildung 4: Chomsky-Hierarchie

Aufgabe 16 *(?? Punkte)*

Bitte ergänze den folgenden Lückentext, welcher sich mit den Sprachklassen der Chomsky-Hierarchie beschäftigt um geeignete Ergänzungen.

Hilfestellung: Folgende Worte müssen (in unter Umständen geeignet grammatikalisch abgewandelter Form) an einer oder mehrerer Stellen in den Text eingefügt werden: *Alphabet*, *Chomsky-Normalform*, *deterministisch*, *endlich*, *gleich*, *kontextfrei*, *nichtdeterministisch*, *Produktionsregeln*, *regulär*, *Startvariable*, *unendlich*, *ungleich*, *Variablen*.

Achtung: Neben den hier aufgeführten Worten müssen einige Lücken auch mit anderen (hier nicht vorgegebenen Inhalten) ergänzt werden, die geeignet selbst zu wählen sind!

Lückentext: Die Chomsky-Hierarchie klassifiziert die durch Grammatiken erzeugbaren Sprachen über Eigenschaften der Produktionsregeln der Grammatiken. Eine Grammatik G ist ein Tupel $G = (\ldots\ldots,\ldots\ldots,\ldots\ldots,\ldots\ldots)$, wobei ...... ein ...., ... eine Menge von ...., ... die .... und ...... eine Menge von .... ist.

Die Klasse der regulären Sprachen enthält Sprachen, die über ....

Grammatiken gebildet werden können. Eine Grammatik heißt ...., wenn alle ihre Produktionsregeln $u \rightarrow v \in P$ die Eigenschaften $u \in$ .... sowie $v \in$ .... oder $v \in$ .... erfüllen. Ein Beispiel einer typischen regulären Sprache ist die Sprache $L_{rg} =$ .... Reguläre Sprachen können entweder .... oder .... sein. Die Klasse der .... Sprachen bildet hierbei eine Teilklasse der Klasse der regulären Sprachen. Reguläre Sprachen werden von endlichen Automaten erkannt. Endliche Automaten können deterministisch oder nichtdeterministisch sein. Die Klasse der von deterministischen endlichen Automaten akzeptierten Sprachen ist hierbei .... der Klasse der von nichtdeterministischen endlichen Automaten akzeptierten Sprachen.

Die kontextfreien Sprachen werden durch solche Grammatiken gebildet, deren Produktionsregeln $u \rightarrow v \in P$ die Form $u \in$ .... sowie $v \in$ .... haben. Damit ist natürlich jede .... Grammatik auch eine .... Grammatik. Ein typisches Beispiel einer kontextfreien Sprache ist $L_{kf} =$ .... Jede kontextfreie Grammatik G läßt sich durch geeignetes Umformen der Regeln der Grammatik in eine Grammatik G' in .... konvertieren. Die von G und G' erzeugten Sprachen sind hierbei .... Die Produktionsregeln $u \rightarrow v \in P$ von Grammatiken in .... sind hierbei von der Form $u \in$ .... und $v \in$ .... oder $u \in$ .... und $v \in$ .... Kontextfreie Sprachen werden von deterministischen oder nichtdeterministischen Kellermaschinen erkannt. Die Klasse der von deterministischen Kellermaschinen akzeptierten Sprachen ist hierbei .... der Klasse der von nichtdeterministischen Kellerautomaten akzeptierten Sprachen. Palindrome sind Worte über einem Alphabet, die von vorne gelesen das selbe Worte ergeben wie von hinten gelesen. Die Sprache der Palindrome mit Trennzeichen läßt sich hierbei auch von .... Kellermaschinen akzeptieren, wohingegen die Sprache der Palindrome ohne Trennzeichen nur von .... Kellermaschinen akzepziert wird.

Die kontextsensitiven Sprachen werden durch solche Grammatiken gebildet, deren Produktionsregeln $u \rightarrow v \in P$ die Eigenschaft $u \in$ .... und $v \in$ .... mit $|u|$ ...... $|v|$ erfüllen. Ein Beispiel einer typischen kontextsensitiven Sprache ist die Sprache $L_{ks} =$ ....

Die allgemeinen Sprachen werden ebenfalls über Grammatiken gebildet, wobei die Produktionsregeln dieser Grammatiken keinen Einschränkungen unterliegen. Ein typisches Beispiel einer allgemeinen Sprache ist das Halteproblem.

Aufgabe 17 *(? Punkte)*

Die einzelnen Sprachklassen der Chomsky-Hierarchie sind unter unterschiedlichen Operationen abgeschlossen. Fülle bitte die folgende Tabelle aus, indem du *ja* einträgst, wenn die entsprechende Sprachklasse unter der angegebenen Operation abgeschlossen ist; ist sie das nicht, so trage *nein* ein.

Achtung: Bei Aufgaben dieser Art kann es sein, dass es bei falscher Antwort einen Punktabzug gibt. In solchen Fällen ist es also besser (bzw. risikofreier) nicht zu raten und gegebenenfalls auch mal einen Eintrag auszulassen. (Solch ein möglicher Punktabzug wird aber immer in der Aufgabenstellung angegeben).

	Schnitt	Vereingung	Komplement	Verkettung (Konkatenation)	Kleene-Stern
Typ 3					
Det. kf					
Typ 2					
Typ 1					
Typ 0					

Aufgabe 18 *(? Punkte)*

Die folgenden Teilaufgaben beziehen sich auf Fragen der Entscheidbarkeit.

1. Betrachte die folgenden zwei Sprachen:

   - $L_1 = \{w \mid M_w \text{ hält bei Eingabe } w\}$.
   - $L_2 = \{w \mid M_w \text{ hält bei Eingabe } w \text{ nicht}\}$.

   Bitte beschreibe, in welchem Zusammenhang die Sprachen L_1 und L_2 stehen:

   ....
   ....

   Unter welchem Namen ist die Sprache L_1 auch bekannt?

   ....

   Welche Rolle spielt in der obigen Definition ein Wort w in Bezug auf die Turingmaschine M_w?

   ....
   ....
   ....
   ....

2. Formale Sprachen können entweder entscheidbar, semi-entscheidbar oder unentscheidbar sind. Bitte beschreibe in eigenen Worten, was sich hinter diesen Begriff verbirgt:

   - Eine Sprache ist entscheidbar, wenn:
     ....
     ....
     ....
   - Eine Sprache ist semi-entscheidbar, wenn:
     ....
     ....
     ....
   - Eine Sprache ist unentscheidbar, wenn:
     ....
     ....
     ....

3. Bitte kreuze in der folgenden Tabelle an, ob die gemachten Aussagen wahr und falsch sind.

Aussage	wahr	falsch
Die Klasse der kontextfreien Sprachen enthält nur entscheidbare Sprachen.		
Die Klasse der allgemeinen (Typ-0-)Sprachen enthält nur semi-entscheidbare Sprachen, aber keine entscheidbaren Sprachen.		
Es gibt allgemeine (Typ-0-)Sprachen, welche nicht kontextfrei, die aber dennoch entscheidbar sind.		
Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar.		
Das spezielle Halteproblem ist semi-entscheidbar.		
Das Komplement des speziellen Halteproblems ist unentscheidbar, also weder entscheidbar noch semi-entscheidbar.		

Aufgabe 19 *(? Punkte)*

In den folgenden Teilaufgaben soll das $P = NP$-Problem näher untersucht werden.

1. Nach dem Satz von Cook erfüllt das Erfüllbarkeitsproblem für boolsche Ausdrücke SAT zwei wichtige Eigenschaften. Bitte gib diese Eigenschaften durch Vervollständigung der beiden folgenden Punkte an:

   - SAT ...... NP.
   - SAT ist NP-hart.
     Beschreibe bitte, welche Eigenschaft SAT erfüllt, um NP-hart zu sein:
     ....
     ....
     ....
     ....

2. Bitte kreuze in der folgenden Tabelle an, ob die gemachten Aussagen wahr oder falsch sind:

Aussage	wahr	falsch
Die Klasse P enthält nur entscheidbare Sprachen.		
Die Klasse NP enthält nur entscheidbare Sprachen.		
Es gibt Sprachen A in NP, für die eine *deterministische*, polynomiell zeitbeschränkte Turingmaschine M existiert, so daß $L(M) = A$ gilt.		
Sei A eine Sprache aus NP, welche auf das Erfüllbarkeitsproblem für boolsche Ausdrücke SAT reduziert werden kann. Läßt sich nun eine deterministische, polynomiell zeitbeschränkte Turingmaschine M finden, für die $L(M) = A$ gilt, so gilt notwendigerweise $P = NP$.		
Sei A eine Sprache aus NP, auf welche das Erfüllbarkeitsproblem für boolsche Ausdrücke SAT reduziert werden kann. Läßt sich nun eine deterministische, polynomiell zeitbeschränkte Turingmaschine M finden, für die $L(M) = A$ gilt, so gilt notwendigerweise $P = NP$.		

3. Bitte kreuze in der folgenden Tabelle an, ob die gemachten Aussagen bekannt oder bislang unbekannt sind:

Aussage	bekannt	unbekannt
Die Klasse P ist Teilklasse der Klasse NP.		
Die Klasse NP ist Teilklasse der Klasse P.		
Die Klasse P ist gleich der Klasse NP.		
Jede NP-vollständige Sprache A kann nur dann von einer *deterministischen* Turingmaschine entschieden werden, wenn diese Turingmaschine exponentiellen Aufwand hat.		