Technische Universität Berlin Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik	**Prüfungen** in Theoretischer Elektrotechnik
Semester: WS 2002/2003	Tag der Prüfung: 12.2.2003

Prüfung

im Fach

TET I

Musterlösung

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

⇑ *bitte in Druckbuchstaben ausfüllen* ⇑

Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Rückseite!

Aufgabe	**A1** (2)	**A2** (2)	**A3** (3)	**A4** (2)	**A5** (3)	**A6** (2)	**A7** (2)
Punkte							
Aufgabe	**B1** (5)	**B2** (6)	**B3** (6)	**B4** (6)	**B5** (6)	Σ P	Note
Punkte							

HINWEISE

(bitte vor Beginn sorgfältig lesen!)

a) Prüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Es muß aus insgesamt 8 Blättern bestehen (1 Deckblatt, 2 Blätter mit den Aufgaben A1 bis A7, jeweils 1 Blatt für die Aufgaben B1 bis B5). **Falls Sie ein unvollständiges Klausurexemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte ein einwandfreies Exemplar aushändigen.**

b) Tragen sie auf dem Deckblatt Ihren Vornamen, Namen und die Matrikelnummer ein.

c) Sie haben 120 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Aufgaben. Es sind maximal 45 Punkte erreichbar.

d) Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben nur den unter den Fragen freigelassenen Raum (bei den Fragen B1 bis B5 evt. auch die Rückseite). **Es werden beim Einsammeln keine Extrablätter angenommen!**

e) Achten Sie darauf, daß der Lösungsweg für den Korrektor nachvollziehbar ist.

f) Es sind **keinerlei Hilfsmittel** außer einem Schreibstift gestattet. Verwenden Sie aber bitte **keinen Bleistift**.

g) Die Teilnahme an dieser Klausur setzt eine **Anmeldung beim Prüfungsamt** voraus. Sollte diese nicht vorliegen, so kann die Klausur nicht benotet werden.

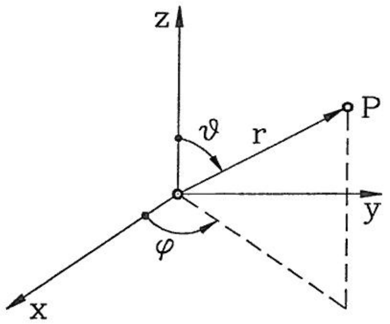
Bitte bestätigen Sie durch Ihre Unterschrift, daß Sie die Hinweise gelesen und verstanden haben.

Datum: ....

Unterschrift: ....

Aufgabe A1

Zeichne die Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) eines Punktes P in einem kartesischen Koordinatensystem ein und gib den Zusammenhang zwischen den Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) und den kartesischen Koordinaten (x, y, z) an.



$$x = r\,\sin\vartheta\cos\varphi \qquad 0 \le r < \infty$$
$$y = r\,\sin\vartheta\sin\varphi \qquad 0 \le \vartheta \le \pi$$
$$z = r\,\cos\vartheta \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$$

Aufgabe A2

a) Wie lautet das *totale Differential* einer skalaren Ortsfunktion $\phi(x, y, z)$?

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem totalen Differential und dem Gradienten der Ortsfunktion $\phi(x, y, z)$?

a)

$$\mathrm{d}\phi(x,y,z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

b)

$$\mathrm{d}\phi = \nabla\phi\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} \quad , \quad \mathrm{d}\mathbf{s} = \mathrm{d}x\,\mathbf{e}_x + \mathrm{d}y\,\mathbf{e}_y + \mathrm{d}z\,\mathbf{e}_z$$

Aufgabe A3

a) Notieren Sie die Grundgleichungen der Elektrostatik in differentieller Form und überführen Sie diese dann mit Hilfe von Integralsätzen in die integrale Form.

b) Begründen Sie die Einführung einer skalaren Ortsfunktion (Potential) zur Beschreibung elektrostatischer Felder und geben Sie den Zusammenhang mit dem elektrischen Feld an.

a)

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \int_F \nabla \times \mathbf{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0 \quad \text{(für alle geschlossenen Konturen } C\text{)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_V \quad \rightarrow \quad \int_V \nabla \cdot \mathbf{D}\, \mathrm{d}V = \oint \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{O} = Q \quad \text{(eingeschlossene Ladung)}$$

b) Wegen $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ und der Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes kann dieses in der Form

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

durch das skalare Potential ϕ beschrieben werden.

Aufgabe A4

Wie groß ist die Kraft pro Längeneinheit, die zwischen zwei parallelen, unendlich langen Linienladungen $\pm q_L$ wirkt, wenn diese den Abstand a voneinander haben?

Die Kraft pro Längeneinheit auf die positive Linienladung ist

$$\mathbf{F}' = q_L \, \mathbf{E}\,,$$

wobei $\mathbf{E}$ das Feld der negativen Ladung ist

$$\mathbf{E} = -\frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{a}}{a^2}\,.$$

Der Vektor $\mathbf{a}$ zeigt dabei von der negativen zur positiven Linienladung.

Aufgabe A5

Zeige, daß im Falle ebener Magnetfelder mit z–gerichteten Strömen die Gleichung der magnetischen Feldlinien durch Konstanthalten des Vektorpotentials gegeben ist.

Ebene Magnetfelder mit z–gerichteten Strömen lassen sich sich durch ein allein z–gerichtetes Vektorpotential in der Form

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{e}_z A(x,y)) = \nabla A \times \mathbf{e}_z$$

darstellen. Auf einer magnetischen Feldlinie sind Wegelement und Feld immer parallel, so daß man schreiben kann

$$\mathrm{d}\mathbf{s} \times \mathbf{B} \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}\mathbf{s} \times (\nabla A \times \mathbf{e}_z) = -\mathbf{e}_z\,(\nabla A \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}) = -\mathbf{e}_z\,\mathrm{d}A = 0$$

$$\rightarrow \quad A(x,y) = \text{const.} \quad \textbf{q.e.d.}$$

Aufgabe A6

Missverständnis / alle 3 Orte

Im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems befinde sich ein z-gerichteter magnetostatischer Dipol. Man bestimme das Vektorpotential am Ort $x = a$, $y = a$, $z = 0$!

Das Vektorpotential eines magnetostatischen Dipols ist 0.5

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}}{r^3}\,.$$

Mit $\mathbf{r} = a\,\mathbf{e}_x + a\,\mathbf{e}_y$ und $\mathbf{p}_m = p_0\,\mathbf{e}_z$ wird daraus 0.5 Kreuzprodukt 0.5

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 p_0}{4\pi a^2}\,(-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$$

0.5

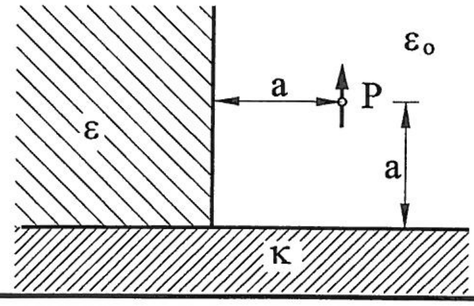
$\frac{1}{2\sqrt{2}}$?

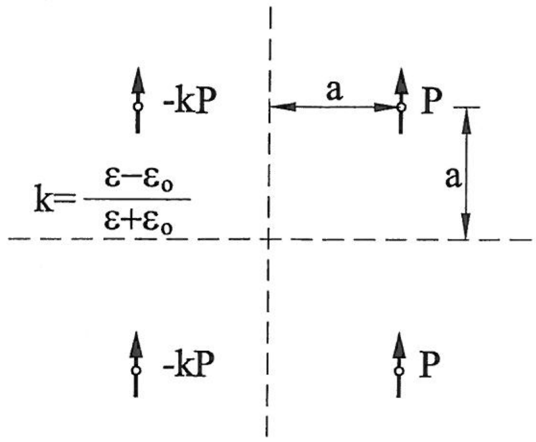
Wenn Erg f ⇒ (± 1.5)

Bonus Skizze 0.5

Aufgabe A7

Gegeben ist ein elektrostatischer Dipol, der sich vor einer leitenden Ebene und einem Dielektrikum befindet (siehe Bild). Man gebe eine Ersatzanordnung zur Berechnung des Feldes außerhalb des Dielektrikums und der leitenden Ebene an.

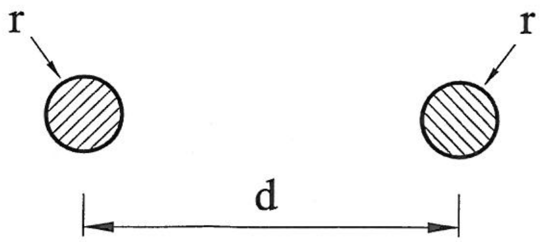




In der Ersatzanordnung herrscht überall die Dielektrizitätskonstante ε_0.

Aufgabe B1

Berechne die Kapazität pro Längeneinheit einer aus zwei dünnen Drähten (Radius r, Abstand d) bestehenden unendlich langen Doppelleitung mit $r \ll d$.



Ersatzanordnung aus zwei Linienladungen q_L und $-q_L$ im Abstand d liefert wegen $r \ll d$ kreisförmige Äquipotentialflächen im Abstand r von den Linienladungen.

Potential der beiden Linienladungen:

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{q_L}{2\,\pi\,\varepsilon}\,\ln\frac{r}{c_0} + \frac{q_L}{2\,\pi\,\varepsilon}\,\ln\frac{d-r}{c_0} \\ \phi &= \frac{q_L}{2\,\pi\,\varepsilon}\,\ln\frac{d}{r} \qquad \text{wegen} \quad d - r \approx d \end{aligned}$$

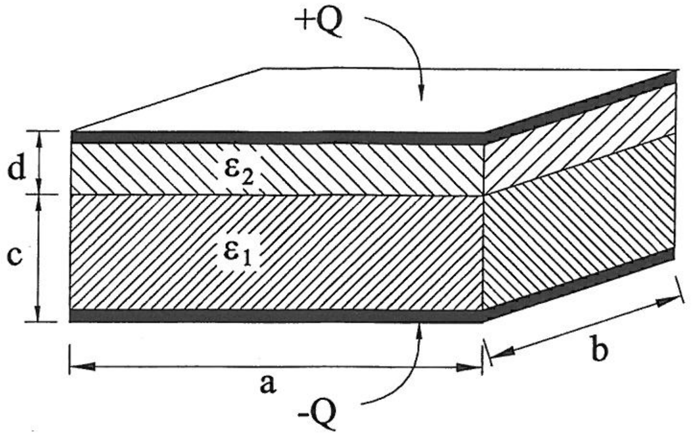
Kapazität pro Längeneinheit:

$$C' = \frac{q_L}{U}$$

$$U = 2\,\phi \quad \Rightarrow \quad C' = \frac{q_L}{2\,\frac{q_L}{2\,\pi\,\varepsilon}\,\ln\frac{d}{r}} = \pi\,\varepsilon\,\frac{1}{\ln\frac{d}{r}}$$

Aufgabe B2

Gegeben ist ein idealer Plattenkondensator mit geschichtetem Dielektrikum. Die Elektroden tragen die konstant gehaltenen Ladungen $\pm Q$.



Mit Hilfe des Prinzips der *virtuellen Verrückung* ist der mechanische Druck zu bestimmen, der in der Trennfläche zwischen den beiden Dielektrika auf das Dielektrikum ε_2 wirkt.

Da die Kondensatorladung vorgegeben ist, handelt es sich hier um ein *abgeschlossenes System*. Der Zusammenhang zwischen der elektrostatischen Feldenergie und der Kraft ist dann

$$\mathbf{F} = -\frac{\delta W_e}{\delta s} \quad .$$

Da es sich um einen idealen Kondensator handeln soll, wird sich aufgrund der vorgegebenen Ladung eine konstante Flußdichte

$$D = \frac{Q}{ab}$$

zwischen den Platten einstellen und damit eine gespeicherte Feldenergie

$$W_e = \frac{1}{2} D^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_1} c + \frac{1}{\varepsilon_2} d\right) ab \, .$$

Nun denken wir uns die Grenzschicht um den Betrag δs in vertikaler Richtung nach oben virtuell verrückt. Dann erhalten wir die veränderte Feldenergie

$$W_e + \delta W_e = \frac{1}{2} D^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_1}[c + \delta s] + \frac{1}{\varepsilon_2}[d - \delta s]\right) ab \, .$$

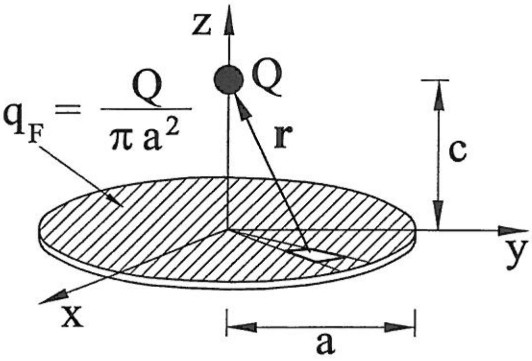
Der gesuchte mechanische Druck ist also

$$\boldsymbol{\sigma} = -\frac{1}{ab}\frac{\delta W_e}{\delta s}\mathbf{n} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{a^2 b^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\mathbf{n} \, .$$

Wie man sieht, wird der Bereich mit dem größeren Dielektrikum auf Zug beansprucht und der andere Bereich entsprechend auf Druck!

Aufgabe B3

Im kartesischen Koordinatensystem sei die Fläche $x^2 + y^2 \leq a^2$ der Ebene $z = 0$ homogen mit der Gesamtladung Q belegt.



Zu bestimmen ist die Kraft auf eine Punktladung Q, die im Abstand c von der Flächenladung auf der z-Achse angeordnet ist.

Nach dem Coulombschen Gesetz ist die Kraft auf eine Punktladung Q im *äußeren* elektrischen Feld der Feldstärke $\mathbf{E}$

$$\boxed{\mathbf{F} = Q\mathbf{E}} \quad .$$

Die vorliegende Anordnung ist rotationssymmetrisch, so daß die Rotationsachse (z-Achse) naturgemäß eine Feldlinie darstellt und daher nur eine Kraft in z-Richtung auftreten wird:

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_z F_z = \mathbf{e}_z Q E_z$$

Der elementare Feldstärkebeitrag am Ort der Punktladung infolge der differentiellen Ladung $\mathrm{d}Q = q_F\, \mathrm{d}F'$ beträgt zunächst

$$\mathrm{d}E_z = \frac{q_F\, \mathrm{d}F'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

mit

$$\mathrm{d}F' = \varrho'\, \mathrm{d}\varrho'\, \mathrm{d}\varphi'$$

und

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_z c - \mathbf{e}_{\varrho'} \varrho' \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{c^2 + \varrho'^2} \quad ,$$

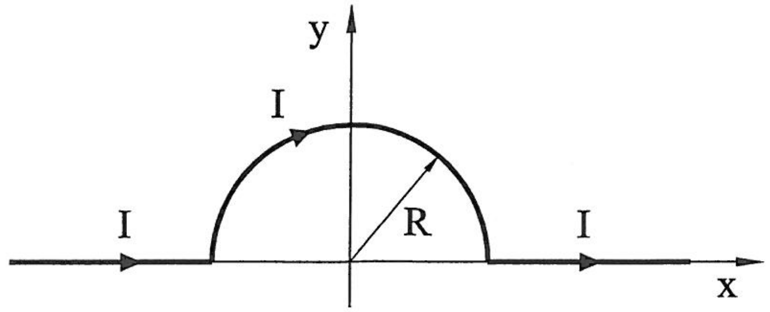
so daß man für die resultierende Feldstärke den Ausdruck

$$\begin{aligned} E_z(\varrho = 0, z = c) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\pi a^2} \int\limits_{\varrho'=0}^{a} \int\limits_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{c}{(c^2 + \varrho'^2)^{3/2}} \varrho'\, \mathrm{d}\varrho'\, \mathrm{d}\varphi' = \\ &= \underbrace{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}}_{2E_0} \int\limits_0^a \frac{c}{(c^2 + \varrho'^2)^{3/2}} \varrho'\, \mathrm{d}\varrho' = -2E_0 \left. \frac{c}{\sqrt{c^2 + \varrho'^2}} \right|_0^a = \\ &= 2E_0 \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/c^2}} \right\} \end{aligned}$$

erhält.

Aufgabe B4

Gegeben sei ein in der x, y-Ebene liegender Stromfaden mit halbkreisförmiger Ausbuchtung. Der Radius des Halbkreises sei R. Durch die Schleife fließe der Strom I.



Man berechne die magnetische Feldstärke im Koordinatenursprung mit dem Gesetz von BIOT-SAVART.

Die Berechnung erfolgt mit dem Gesetz von BIOT-SAVART

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} . \tag{1}$$

Die gesamte Kontur wird dabei in drei Wege S_1, S_2 und S_3 zerlegt

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int_{S_1} \mathrm{d}\mathbf{H}_1 + \int_{S_2} \mathrm{d}\mathbf{H}_2 + \int_{S_3} \mathrm{d}\mathbf{H}_3 , \tag{2}$$

wobei S_2 der Halbkreis und S_1 bzw. S_3 die Geradenstücke seien.

Integration über S_1

Wegen $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -x'\,\mathbf{e}_x$ und $\mathrm{d}\mathbf{s}' = \mathrm{d}x'\,\mathbf{e}_x$ folgt sofort, daß die Wegintegration über S_1 aufgrund des Kreuzproduktes keinen Beitrag liefert.

Integration über S_3

Hier gilt natürlich das schon bei der Betrachtung des Weges S_1 gesagte.

Integration über S_2

Der Halbkreisbogen wird zweckmäßigerweise in Polarkoordinaten betrachtet. Dann gilt

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -R\,\mathbf{e}_\varrho \quad , \quad \mathrm{d}\mathbf{s}' = -R\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathbf{e}_\varphi .$$

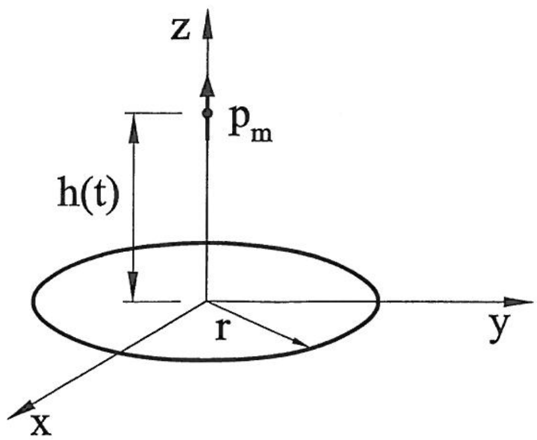
Einsetzen in das Gesetz von BIOT-SAVART liefert

$$\mathbf{H}(0,0,0) = \frac{I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{R^2\,(\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_\varrho)}{R^3}\,\mathrm{d}\varphi' \tag{3}$$

$$\boxed{\mathbf{H}(0,0,0) = -\frac{I}{4R}\,\mathbf{e}_z} \tag{4}$$

Aufgabe B5

Ein magnetischer Dipol $\mathbf{p}_m = p_m \mathbf{e}_z$ befindet sich im Abstand h_0 auf der Achse einer dünnen, runden Leiterschleife. Die Schleife habe einen Widerstand R.



Welcher Strom wird in der Schleife induziert, wenn der Dipol eine kleine harmonische Bewegung

$$h(t) = h_0 + \delta \cdot \cos\omega t \quad , \quad \delta \ll h_0$$

um die Ruhelage h_0 ausführt?

Vektorpotential des Dipols: $\mathbf{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} p_m \dfrac{\sin\vartheta}{r_1^2}\,\mathbf{e}_\varphi$

(r_1: Abstand Dipol – Leiterschleife)

$$r_1^2 = r^2 + h^2(t) \quad , \quad \sin\vartheta = \frac{r}{r_1} \quad , \quad h^2(t) \approx h_0^2 + 2h_0\delta \cdot \cos\omega t$$

Induktionsgesetz:

$$i(t)R = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint \mathbf{A} \cdot \underbrace{\mathrm{d}\mathbf{s}}_{\mathbf{e}_\varphi r\,\mathrm{d}\varphi}$$

$$i(t)R \approx -\frac{\mu_0}{2} p_m r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{r_1^3}\right\} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{r_1^3}\right\} = -3\frac{1}{r_1^4}\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{2}\frac{1}{r_1^5}\frac{\mathrm{d}r_1^2}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{i(t) \approx -\frac{3}{2}\frac{\mu_0 p_m}{R}\frac{r^2 h_0 \delta}{r_1^5}\,\omega\,\sin\omega t} \quad , \quad r_1 = \sqrt{r^2 + h^2(t)}$$