Technische Universität Berlin Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik	**Prüfungen** in Theoretischer Elektrotechnik

Semester: WS 03/04 Tag der Prüfung: 14.01.2004

2. Teilprüfung

im Fach

TET I

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

⇑ *bitte in Druckbuchstaben ausfüllen* ⇑

Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Rückseite!

Aufgabe	**A1** (3)	**A2** (3)	**A3** (2)	**A4** (3)	**A5** (3)	**A6** (3)
Punkte						
Aufgabe	**B1** (5)	**B2** (6)	**B3** (5)		Σ P	Note
Punkte						

HINWEISE

(bitte vor Beginn sorgfältig lesen!)

a) Prüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Es muß aus insgesamt 6 Blättern bestehen (1 Deckblatt, 2 Blätter mit den Aufgaben A1 bis A6, jeweils 1 Blatt für die Aufgaben B1 bis B3). **Falls Sie ein unvollständiges Klausurexemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte ein einwandfreies Exemplar aushändigen.**

b) Tragen sie auf dem Deckblatt Ihren Vornamen, Namen und die Matrikelnummer ein.

c) Sie haben 90 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Aufgaben. Es sind maximal 33 Punkte erreichbar.

d) Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben nur den unter den Fragen freigelassenen Raum (bei den Fragen B1 bis B3 auch die Rückseite). **Es werden beim Einsammeln keine Extrablätter angenommen!**

e) Achten Sie darauf, daß der Lösungsweg für den Korrektor nachvollziehbar ist.

f) Es sind **keinerlei Hilfsmittel** außer einem Schreibstift gestattet. Verwenden Sie aber bitte **keinen Bleistift**.

g) Die Teilnahme an dieser Klausur setzt eine **Anmeldung beim Prüfungsamt** voraus. Sollte diese nicht vorliegen, so kann die Klausur nicht benotet werden.

Bitte bestätigen Sie durch Ihre Unterschrift, daß Sie die Hinweise gelesen und verstanden haben.

Datum: ....

Unterschrift: ....

Aufgabe A1

Gegeben seien 2 Punktladungen $\pm Q$ mit dem gegenseitigen Abstand a. Welche Arbeit muß man aufwenden, um die positive Ladung ins Unendliche zu befördern?

Die potentielle Energie der positiven Ladung im Felde der negativen Ladung ist

$$W_{pot} = Q\,\phi = Q\,\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\ .$$

Dies ist gleichzeitig die Arbeit, die man aufwenden muß, um die positive Ladung aus dem Unendlichen in ihre Position zu bringen. Um sie wieder ins Unendliche zu befördern, muß man also die Arbeit

$$W = +\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

leisten.

Aufgabe A2

Gib zwei Möglichkeiten an, um das elektrostatische Potential eines polarisierten Körpers mit der Polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$ zu bestimmen.

Eine Möglichkeit, das Feld eines polarisierten Körpers zu bestimmen, ist eine Integration über das dipolbehaftete Volumen durchzuführen:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\ \mathrm{d}V'$$

Ein polarisiertes Volumen läßt sich aber auch durch äquivalente Polarisationsraumladungen und Polarisationsflächenladungen

$$q_{Vpol} = -\nabla\cdot\mathbf{P} \quad , \quad q_{Fpol} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{P}$$

beschreiben, wobei $\mathbf{n}$ die Flächennormale der Oberfläche des polarisierten Volumens sein soll. Daraus ließe sich dann das Potential in der Form

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_V \frac{q_{Vpol}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\ \mathrm{d}V' + \oint_O \frac{q_{Fpol}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\ \mathrm{d}O'\right)$$

bestimmen.

Aufgabe A3

Gegeben ist ein System aus N Leitern mit den Leiterpotentialen ϕ_i und den Leiterladungen Q_i. Wie berechnet man aus den *Potentialkoeffizienten* p_{ik} die *Kapazitätskoeffizienten* c_{ik}, mit $i = 1 \ldots N$, $k = 1 \ldots N$?

Der Zusammenhang zwischen den Leiterpotentialen und den Leiterladungen ist durch die Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots \\ c_{21} & c_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

gegeben, d.h. die Kapazitätskoeffizienten c_{ik} erhält man durch Inversion der Matrix mit den Elementen p_{ik}.

Aufgabe A4

Erläutere, wie man von einem zweidimensionalen, raumladungsfreien, elektrischen Feld $\mathbf{E} = E_x(x,y)\,\mathbf{e}_x + E_y(x,y)\,\mathbf{e}_y$ den Verlauf der elektrischen Feldlinien erhält.

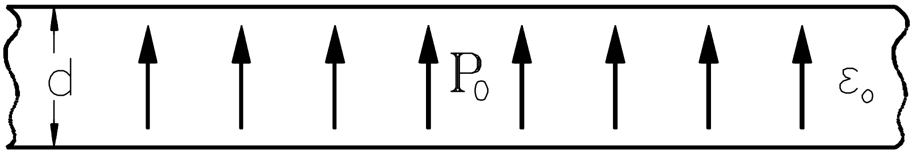
Bei raumladungsfreien Feldern ist der elektrische Fluß $\psi'(x,y)$ pro Längeneinheit der Koordinate z, der durch eine beliebige Kurve $S(x,y)$ zwischen einem Fixpunkt P_0 und einem variablen Punkt $P(x,y)$ auf der Feldlinie hindurchtritt, unabhängig von x und y und damit konstant. Die Gleichung der Feldlinien lautet dann

$$\psi'_e(x,y) = \varepsilon_0 \int\limits_S E_n \, \mathrm{d}S = \text{const.} \quad ,$$

wobei E_n die auf der Kurve S senkrecht stehende Feldkomponente ist.

Aufgabe A5

Eine unendlich ausgedehnte Platte der Dicke d habe die konstante Polarisierung $\mathbf{P}_0$. Wie groß ist die elektrische Feldstärke und die dielektrische Verschiebung innerhalb und außerhalb der Platte?



Ersatzanordnung: zwei Polarisationsflächenladungen $\pm q_{Fpol}$ auf der Ober– bzw. Unterseite der Platte.

Feld außerhalb der Platte:

$$E_a = 0 \quad , \quad D_a = \varepsilon_0 E_a = 0$$

Feld innerhalb der Platte:

$$E_i = -q_{Fpol}/\varepsilon_0 = -P_0/\varepsilon_0 \quad , \quad D_i = \varepsilon_0 E_i + P_0 = 0$$

Aufgabe A6

Erläutere, wie man näherungsweise die Kapazität einer geraden, schlanken Stabantenne über dem leitenden Erdboden berechnet.

– Die Antenne wird durch eine gerade Linienladung q_L ersetzt.

– Die Linienladung wird am Erdboden gespiegelt.

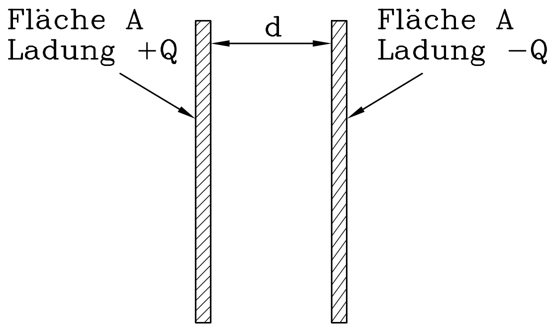
– Die Äquipotentialflächen in unmittelbarer Umgebung der Linienladung sind langgestreckte Rotationskörper.

– Oberfläche der Antenne $\approx$ Rotationskörper $\phi_A = \text{const.}$

– Kapazität: $C = Q/\phi_A$, mit $Q = q_L\, l$, $l =$ Antennenlänge

Aufgabe B1

Gegeben ist ein idealer Plattenkondensator. Die Platten haben die Fläche A, den Abstand d voneinander und tragen die konstanten Ladungen $\pm Q$.



Bestimme die Kraft auf eine der Platten mit Hilfe des Prinzips der *virtuellen Verrückung.*

Die elektrische Feldenergie im Kondensator ist

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A d \ ,$$

wobei E das elektrische Feld

$$E = \frac{U}{d} = \frac{Q/C}{d} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

ist. Verrückt man nun z.B. die rechte Platte um die Strecke δd, so ist dies mit einer Änderung der Feldenergie von

$$\delta W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A\, \delta d$$

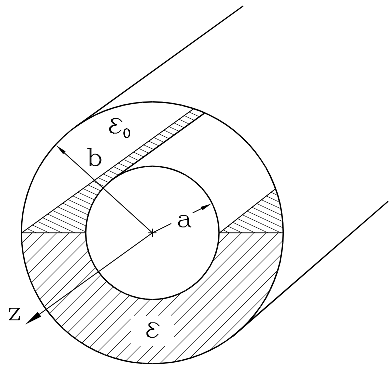
verbunden. Die Kraft auf die rechte Platte in Richtung der vorgenommenen Verrückung wird dann

$$F = -\frac{\delta W_e}{\delta d} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A} \ .$$

Das Vorzeichen beschreibt also eine Kraft entgegen der Verrückung, d.h. die Platten ziehen sich an.

Aufgabe B2

Bestimme die Kapazität pro Längeneinheit eines unendlich langen Zylinderkondensators mit Innenradius a und Außenradius b, der zur Hälfte mit Dielektrikum $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ gefüllt ist.



Die elektrische Feldstärke wird nur radial gerichtet sein und nur von der radialen Koordinate ϱ abhängen

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_\varrho E_\varrho(\varrho) \quad .$$

- Ladung q bzw. q' (pro Längeneinheit) des inneren Leiters:

$$q = \oint \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{O}$$

$$q' = \varepsilon_0 \int_0^\pi E_\varrho \; \varrho \; \mathrm{d}\varphi + \varepsilon \int_\pi^{2\pi} E_\varrho \; \varrho \; \mathrm{d}\varphi \qquad \rightarrow \qquad E_\varrho(\varrho) = \frac{q'}{(\varepsilon_0 + \varepsilon) \; \pi \; \varrho}$$

- Potentialdifferenz:

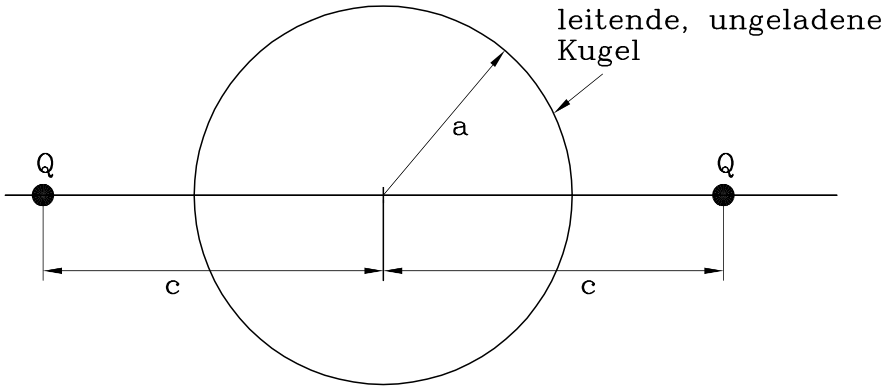
$$\phi(a) - \phi(b) = \int_a^b E_\varrho \; \mathrm{d}\varrho = \frac{q'}{(\varepsilon_0 + \varepsilon) \; \pi} \; \ln \frac{b}{a}$$

- Kapazität pro Längeneinheit:

$$C' = \frac{q'}{\phi(a) - \phi(b)} = \pi \; (\varepsilon_0 + \varepsilon) \; \left\{ \ln \frac{b}{a} \right\}^{-1}$$

Aufgabe B3

Links und rechts vor einer leitenden, *ungeladenen* Kugel mit dem Radius a befinden sich zwei gleiche Punktladungen Q. Sie haben jeweils den Abstand c vom Mittelpunkt der Kugel.



Welches Potential herrscht auf der Kugeloberfläche? Welche Ladungsmenge fließt weiterhin auf die Kugel, wenn diese geerdet wird?

Bringt man innerhalb der Kugel links und rechts im Abstand

$$c^* = a^2/c$$

vom Kugelmittelpunkt zwei gleiche Spiegelladungen

$$Q^* = -\frac{a}{c}\,Q$$

an, so stellt sich auf der Kugeloberfläche das Potential $\phi_K = 0$ ein. Da die Kugel ungeladen sein soll, muß weiterhin im Mittelpunkt der Kugel eine Punktladung

$$Q_M = -2Q^* = \frac{a}{c}\,2Q$$

angeordnet werden. Diese hebt dann das Potential der Kugel auf das gesuchte Potential

$$\phi_K = \frac{Q_M}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 c}$$

an. Erdet man nun die Kugel, so fließt die Ladung

$$Q_K = -Q_M = -\frac{a}{c}\,2Q$$

auf die Kugel.