...chnische Universität Berlin Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik	**Prüfungen** in Theoretischer Elektrotechnik
Semester: WS 04/05	Tag der Prüfung: 18.03.2005

Prüfung

im Fach

TET I

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

⇑ bitte in Druckbuchstaben ausfüllen ⇑

Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Rückseite!

Aufgabe	**A1** (3)	**A2** (3)	**A3** (2)	**A4** (2)	**A5** (2)	**A6** (3)	**A7** (2)
Punkte							
Aufgabe	**B1** (5)	**B2** (6)	**B3** (5)	**B4** (6)	**B5** (6)	Σ P	Note
Punkte							

HINWEISE

(bitte vor Beginn sorgfältig lesen!)

a) Prüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Es muß aus insgesamt 8 Blättern bestehen (1 Deckblatt, 2 Blätter mit den Aufgaben A1 bis A7, jeweils 1 Blatt für die Aufgaben B1 bis B5). **Falls Sie ein unvollständiges Klausurexemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte ein einwandfreies Exemplar aushändigen.**

b) Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Vornamen, Namen und die Matrikelnummer ein.

c) Sie haben 120 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Aufgaben. Es sind maximal 45 Punkte erreichbar.

d) Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben nur den unter den Fragen freigelassenen Raum (bei den Fragen B1 bis B5 evt. auch die Rückseite). **Es werden beim Einsammeln keine Extrablätter angenommen!**

e) Achten Sie darauf, daß der Lösungsweg für den Korrektor nachvollziehbar ist.

f) Es sind **keinerlei Hilfsmittel** außer einem Schreibstift gestattet. Verwenden Sie aber bitte **keinen Bleistift**.

g) Die Teilnahme an dieser Klausur setzt eine **Anmeldung beim Prüfungsamt** voraus. Sollte diese nicht vorliegen, so kann die Klausur nicht benotet werden.

Bitte bestätigen Sie durch Ihre Unterschrift, daß Sie die Hinweise gelesen und verstanden haben.

Datum: ....

Unterschrift: ....

Aufgabe A1

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\mathbf{A} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z)\ .$$

Zu berechnen sind die Ausdrücke

a) $\nabla \cdot \mathbf{A}$

b) $\mathbf{e}_x \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$.

a)

1

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{1}{2}\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

b)

$$\mathbf{e}_x \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \cdot (\mathbf{e}_x \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\mathbf{e}_y\, A_z) = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

1

Aufgabe A2

a) Notiere die Grundgleichungen der Elektrostatik in differentieller Form und überführe diese dann mit Hilfe von Integralsätzen in die integrale Form.

b) Begründe die Einführung einer skalaren Ortsfunktion (Potential) zur Beschreibung elektrostatischer Felder und gib den Zusammenhang mit dem elektrischen Feld an.

a)

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \int_F (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = \oint_C \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0 \quad \text{(für alle Konturen } C\text{)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_V \quad \rightarrow \quad \int_V \nabla \cdot \mathbf{D}\ \mathrm{d}V = \oint \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{O} = Q \quad \text{(eingeschlossene Ladung)}$$

b) Wegen $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$ und der Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes kann dieses in der Form

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

durch das skalare Potential ϕ beschrieben werden.

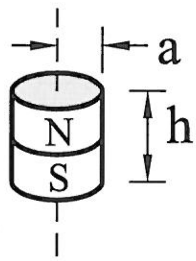
Aufgabe A3

Warum stellt sich in einem leitenden Körper im elektrostatischen Feld ein konstantes Potential ein, wenn von außen keine Energie zugeführt wird? Welche Richtung hat das elektrische Feld auf der Leiteroberfläche?

Würde zwischen zwei Punkten eines leitenden Körpers eine Potentialdifferenz bestehen, so wird diese durch das Fließen eines Stromes ausgeglichen, so daß im stationären elektrostatischen Endzustand im Leiter ein konstantes Potential herrscht. Das Innere des Leiters ist damit feldfrei und die Oberfläche wird zur Äquipotentialfläche, auf der die elektrische Feldstärke senkrecht steht.

Aufgabe A4

Gegeben ist ein kleiner, zylindrischer Stabmagnet mit der Höhe h und dem Radius a. Die Magnetisierung des Stabmagneten sei homogen und habe den Wert M_0.



In großen Entfernungen kann dieser Stabmagnet durch eine kleine kreisförmige Stromschleife mit dem Radius a ersetzt werden. Welcher Strom fließt dann in dieser Stromschleife?

Die Stromschleife hat das magnetische Dipolmoment

$$p_m = M_0\,\pi a^2 h = I\,\pi a^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{I = M_0\,h}\,.$$

Aufgabe A5

Wie lauten im stationären Strömungsfeld die Stetigkeitsbedingungen für die Komponenten der Stromdichte $\mathbf{J}$ an der Trennfläche zwischen zwei Gebieten der Leitfähigkeit κ_1 bzw. κ_2? Aus welchen physikalischen Gesetzen folgen die Bedingungen?

$$\oint \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{O} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad J_{n1} = J_{n2}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E_{t1} = E_{t2} \qquad \Rightarrow \qquad \kappa_2 J_{t1} = \kappa_1 J_{t2}$$

Aufgabe A6

Zeige ausgehend von der Kontinuitätsgleichung, daß eine anfänglich in einem leitenden Medium vorhandene Raumladung q_{V0} exponentiell mit der Zeit abklingt:

$$q_V(t) = q_{V0}\,\mathrm{e}^{-t/T_r}$$

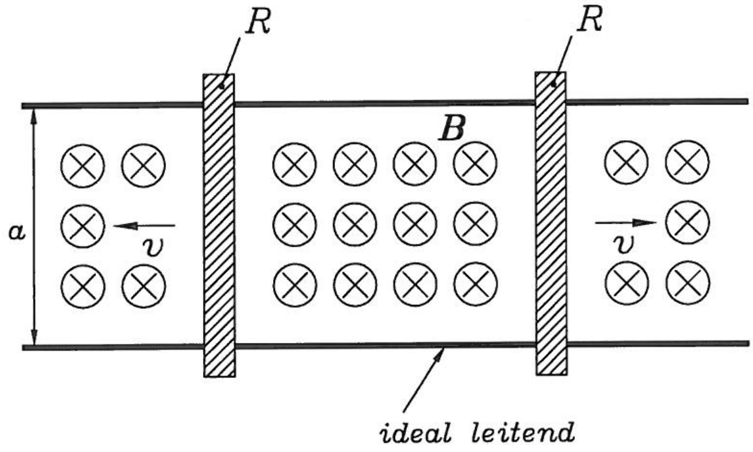
Wie ist dabei die Relaxationszeit T_r definiert?

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \kappa \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\kappa}{\varepsilon} q_V = -\frac{\mathrm{d}q_V}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_V}{\mathrm{d}t} + \frac{\kappa}{\varepsilon} q_V = 0 \quad \longrightarrow \quad q_V(t) = q_{V0}\,\mathrm{e}^{-t/T_r} \quad , \quad \text{Relaxationszeit} : T_r = \frac{\varepsilon}{\kappa}$$

Aufgabe A7

Auf perfekt leitenden Schienen bewegen sich in entgegengesetzter Richtung mit konstanter Geschwindigkeit v zwei leitende Stäbe mit dem Widerstand R. Senkrecht zu der Anordnung wirkt ein homogenes statisches magnetisches Feld $\mathbf{B}$ ein.

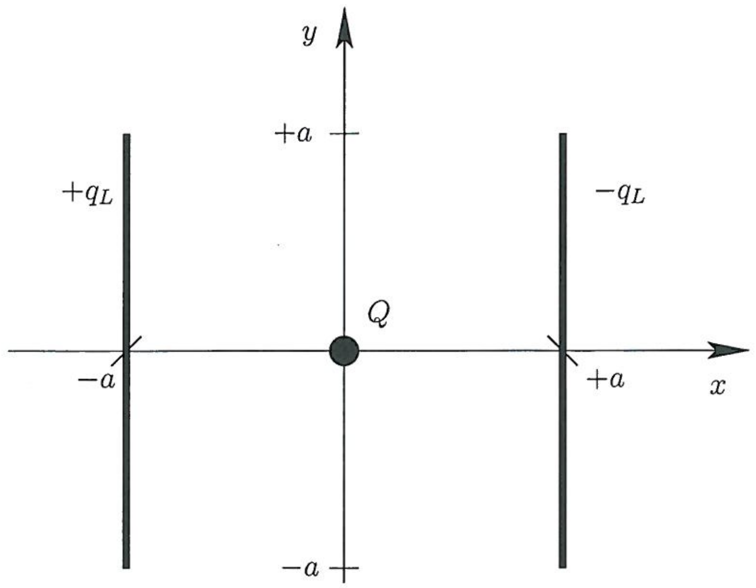


Welche Richtung hat der induzierte Strom in den Stäben und wie kann man die Richtung physikalisch mit Hilfe der LENZschen Regel begründen?

Der induzierte Strom fließt in der aus den Stäben und Schienen gebildeten Schleife entgegen dem Uhrzeigersinn. Damit wirkt das Magnetfeld der Stromschleife seiner Ursache (nämlich dem ansteigenden Magnetfluß) entgegen, weil das induzierte Magnetfeld aus der Zeichenebene heraus zeigt.

Aufgabe B1

In der Ebene $z = 0$ befinden sich parallel zur y-Achse an den Orten $x = \pm a$ zwei homogene Linienladungen $\pm q_L$ mit der Länge $2a$.



Berechne die Kraft auf eine Punktladung Q, die sich im Koordinatenursprung befindet. Nutze dabei die Symmetrie der Anordnung aus.

Hinweis: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$

Zunächst einmal wird im Koordinatenursprung nur eine x-Komponente für das elektrische Feld existieren. Außerdem genügt es, nur den oberen Teil der positiven Linienladung zu betrachten und die übrigen Ladungsanteile dann durch einen Faktor 4 zu berücksichtigen. Die Feldstärke im Koordinatenursprung ist dann

$$E_x = \frac{q_L}{4\pi\varepsilon_0} 4 \int_0^a \frac{\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{R}}{R^3}\,\mathrm{d}y'$$

mit

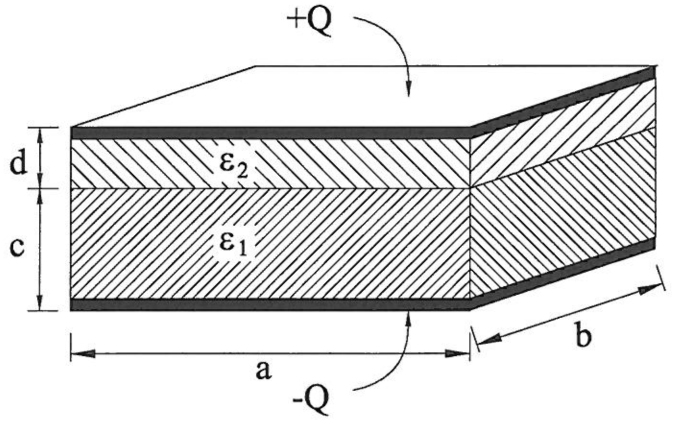
$$\mathbf{R} = a\,\mathbf{e}_x - y'\,\mathbf{e}_y \quad , \quad R = \sqrt{a^2+y'^2} \quad .$$

Kraft auf die Punktladung Q:

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_x \frac{q_L Q}{\pi\varepsilon_0}\, a \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2+y'^2}^3}\,\mathrm{d}y' = \mathbf{e}_x \frac{q_L Q}{\pi\varepsilon_0}\, a \left.\frac{y'}{a^2\sqrt{a^2+y'^2}}\right|_0^a = \underline{\frac{q_L Q}{\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}}\,\mathbf{e}_x}$$

Aufgabe B2

Gegeben ist ein idealer Plattenkondensator mit geschichtetem Dielektrikum. Die Elektroden tragen die konstant gehaltenen Ladungen $\pm Q$.



Mit Hilfe des Prinzips der *virtuellen Verrückung* ist der mechanische Druck zu bestimmen, der in der Trennfläche zwischen den beiden Dielektrika auf das Dielektrikum ε_2 wirkt.

Da die Kondensatorladung vorgegeben ist, handelt es sich hier um ein *abgeschlossenes System.* Der Zusammenhang zwischen der elektrostatischen Feldenergie und der Kraft ist dann

$$F = -\frac{\delta W_e}{\delta s} \quad .$$

Da es sich um einen idealen Kondensator handeln soll, wird sich aufgrund der vorgegebenen Ladung eine konstante Flußdichte

$$D = \frac{Q}{ab}$$

zwischen den Platten einstellen und damit eine gespeicherte Feldenergie

$$W_e = \frac{1}{2} D^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_1} c + \frac{1}{\varepsilon_2} d \right) ab \, .$$

Nun denken wir uns die Grenzschicht um den Betrag δs in vertikaler Richtung nach oben virtuell verrückt. Dann erhalten wir die veränderte Feldenergie

$$W_e + \delta W_e = \frac{1}{2} D^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_1} [c + \delta s] + \frac{1}{\varepsilon_2} [d - \delta s] \right) ab \, .$$

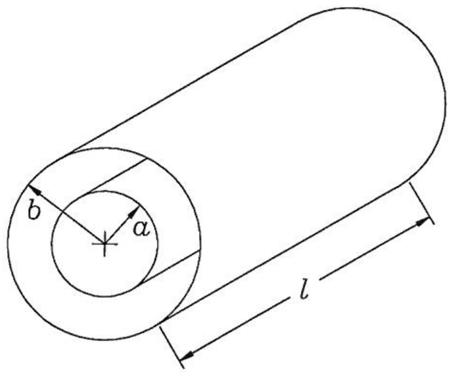
Der gesuchte mechanische Druck ist also

$$\boldsymbol{\sigma} = -\frac{1}{ab} \frac{\delta W_e}{\delta s} \mathbf{n} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{a^2 b^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \mathbf{n} \, .$$

Wie man sieht, wird der Bereich mit dem größeren Dielektrikum auf Zug beansprucht und der andere Bereich entsprechend auf Druck!

Aufgabe B3

Berechne die Kapazität eines Koaxialkabels mit Innenradius a, Außenradius b und mit der Länge l.



Randeffekte am Kabelende sind zu venachlässigen.

Der Innenleiter habe die Ladung Q und der Außenleiter die Ladung $-Q$. Das elektrische Feld zwischen Innenleiter und Außenleiter erhält man dann aus dem GAUSSschen Gesetz:

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{O} = Q \quad \rightarrow \quad Q = 2\pi\varepsilon_0 \varrho E_\varrho l \quad \rightarrow \quad E_\varrho = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \varrho\, l}$$

Spannung zwischen Innen– und Außenleiter:

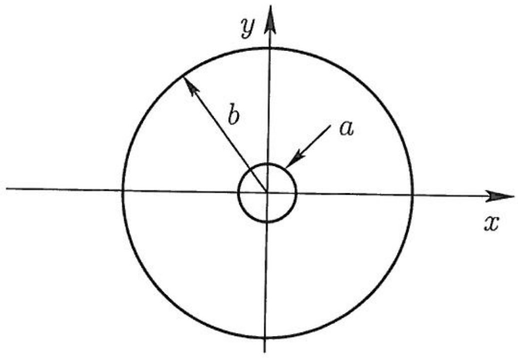
$$U = \int_a^b E_\varrho \,\mathrm{d}\varrho = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\, l} \ln\frac{b}{a}$$

Kapazität:

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\, l}{\ln(b/a)}}$$

Aufgabe B4

In der Ebene $z = 0$ befinden sich zwei konzentrische, dünne Leiterschleifen.



Der Radius der inneren Leiterschleife a sei sehr viel kleiner als der Radius der äußeren Leiterschleife b, $a \ll b$. Unter dieser Voraussetzung berechne man die Gegeninduktivität zwischen den beiden Kreisschleifen.

Erste Möglichkeit: Wir lassen durch die äußere Leiterschleife einen Strom I_1 fließen und berechnen den Fluß durch die innere Leiterschleife.

$$\mathbf{B}_1(\varrho = 0) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_\varphi \times \frac{-b\,\mathbf{e}_\varrho}{b^3}\, b\, \mathrm{d}\varphi = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I_1}{2b} \quad \rightarrow \quad \psi_{12} = \int_F \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I_1 \pi a^2}{2b}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{M = \frac{\psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b}}$$

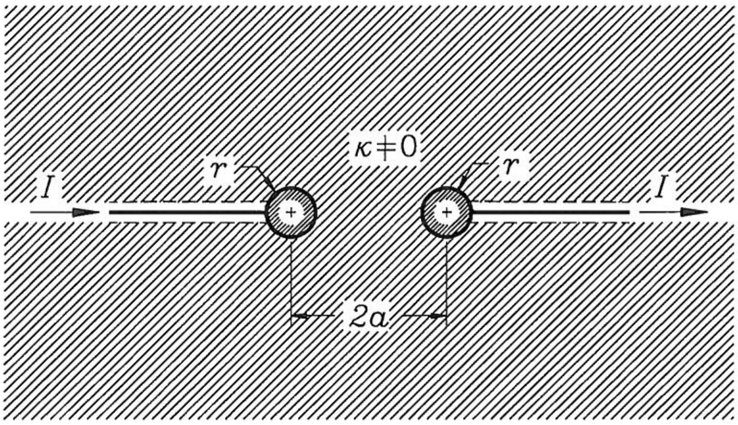
Zweite Möglichkeit: Wir lassen durch die innere Leiterschleife einen Strom I_2 fließen und berechnen den Fluß durch die äußere Leiterschleife. Dabei kann die innere Leiterschleife als magnetischer Dipol aufgefaßt werden.

$$\mathbf{A}_2(\varrho = b) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{p}_m \times \mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_0 I_2 \pi a^2}{4\pi b^2} \quad \rightarrow \quad \psi_{21} = \oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 2\pi b A_\varphi = \frac{\mu_0 I_2 \pi a^2}{2b}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{M = \frac{\psi_{21}}{I_2} = \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b}}$$

Aufgabe B5

Im Gesamtraum der Leitfähigkeit κ befinden sich zwei kleine perfekt leitende Kugeln vom Radius r. Die Kugeln haben die Entfernung $2a$ voneinander und sind mit unendlich langen isolierten Zuleitungen versehen, in die der Strom I zu- bzw. abgeführt wird (siehe Bild). Berechne das magnetische Feld in der Symmetrieebene zwischen den Kugeln!



Hinweis: Es gilt $r \ll 2a$, so daß die Kugeln als punktförmige Stromquelle bzw. -senke aufgefaßt werden dürfen.

Macht man die Symmetrieebene der Anordnung zur Ebene $z = 0$, so lautet die Stromdichte in der Symmetrieebene:

$$\mathrm{J}_z(\varrho, z=0) = 2\,\frac{I}{4\pi}\,\frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3}$$

$$\mathbf{r}_1 = \varrho\,\mathbf{e}_\varrho + a\,\mathbf{e}_z \quad , \quad r_1 = \sqrt{\varrho^2 + a^2}$$

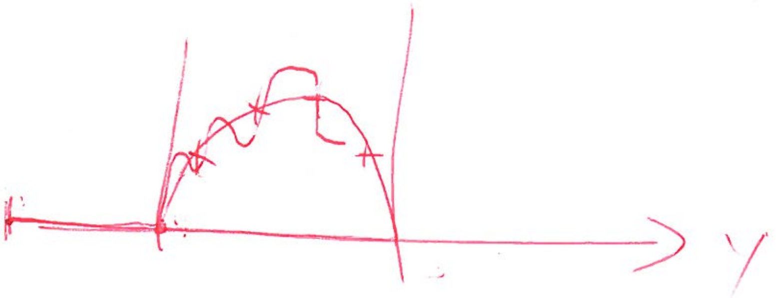
Strom durch eine Kreisfläche vom Radius ϱ :

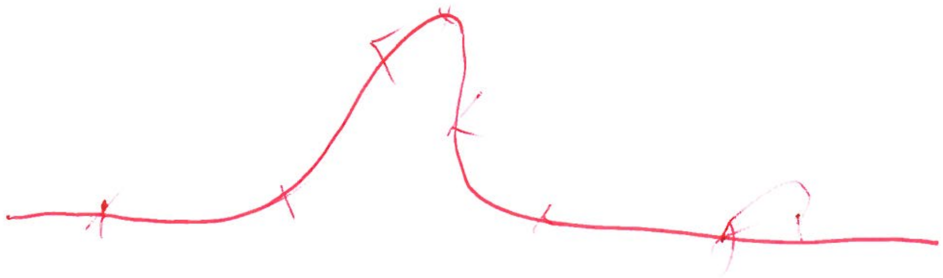
$$\tilde{I}(\varrho) = 2\pi \int_0^\varrho \mathrm{J}_z \tilde{\varrho}\,\mathrm{d}\tilde{\varrho} = I \int_0^\varrho \frac{a}{(\sqrt{\tilde{\varrho}^2 + a^2})^3}\,\tilde{\varrho}\,\mathrm{d}\tilde{\varrho} = I\left[1 - \frac{a}{\sqrt{\varrho^2 + a^2}}\right]$$

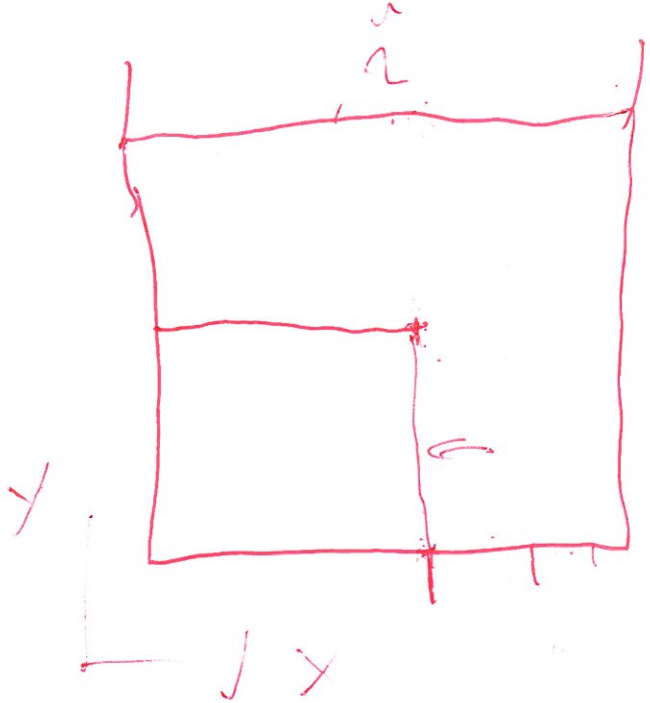
Gesetz von ØRSTED:

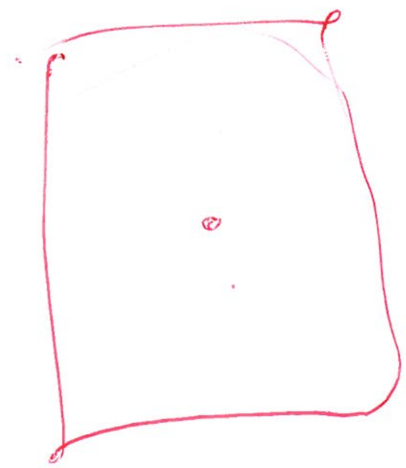
$$\oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{ds} = \tilde{I}(\varrho) \quad \Rightarrow \quad 2\pi\varrho H_\varphi(\varrho) = \tilde{I}(\varrho)$$

$$H_\varphi(\varrho) = \frac{I}{2\pi\varrho}\left[1 - \frac{a}{\sqrt{\varrho^2 + a^2}}\right]$$









FDTD $\sim n^3$

PSTD $\sim 10 (n \cdot \log(n))^3$