Technische Universität Berlin Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik	**Prüfungen** in Theoretischer Elektrotechnik

Semester: WS 2005/06 Tag der Prüfung: 24.11.2005

1. Teilprüfung

im Fach

TET I

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

⇑ *bitte in Druckbuchstaben ausfüllen* ⇑

Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Rückseite!

Aufgabe	**A1** (3)	**A2** (2)	**A3** (3)	**A4** (2)	**A5** (2)	**A6** (3)
Punkte						
Aufgabe	**B1** (6)	**B2** (6)	**B3** (6)		Σ P	Note
Punkte						

HINWEISE

(bitte vor Beginn sorgfältig lesen!)

a) Prüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Es muß aus insgesamt 6 Blättern bestehen (1 Deckblatt, 2 Blätter mit den Aufgaben A1 bis A6, jeweils 1 Blatt für die Aufgaben B1 bis B3). **Falls Sie ein unvollständiges Klausurexemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte ein einwandfreies Exemplar aushändigen.**

b) Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Vornamen, Namen und die Matrikelnummer ein.

c) Sie haben 90 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Aufgaben. Es sind maximal 33 Punkte erreichbar.

d) Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben nur den unter den Fragen freigelassenen Raum (bei den Fragen B1 bis B3 auch die Rückseite). **Es werden beim Einsammeln keine Extrablätter angenommen!**

e) Achten Sie darauf, daß der Lösungsweg für den Korrektor nachvollziehbar ist.

f) Es sind **keinerlei Hilfsmittel** außer einem Schreibstift gestattet. Verwenden Sie aber bitte **keinen Bleistift**.

g) Die Teilnahme an dieser Klausur setzt eine vorherige **Anmeldung** voraus. Sollte diese nicht vorliegen, so kann die Klausur nicht benotet werden.

Bitte bestätigen Sie durch Ihre Unterschrift, daß Sie die Hinweise gelesen und verstanden haben.

Datum: ....

Unterschrift: ....

Aufgabe A1

Aus der Definition des totalen Differentials ist ein Ausdruck für den Gradienten einer skalaren Ortsfunktion in *Kugelkoordinaten* herzuleiten.

Das totale Diffential einer skalaren Ortsfunktion ist in Kugelkoordinaten

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\mathrm{d}r + \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi \quad .$$

Allgemein gilt außerdem $\mathrm{d}V = \operatorname{grad}V \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$.
Mit dem Wegelement in Kugelkoordinaten $\mathrm{d}\mathbf{s} = \mathrm{d}r\,\mathbf{e}_r + r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathbf{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\,\mathbf{e}_\varphi$ wird daraus

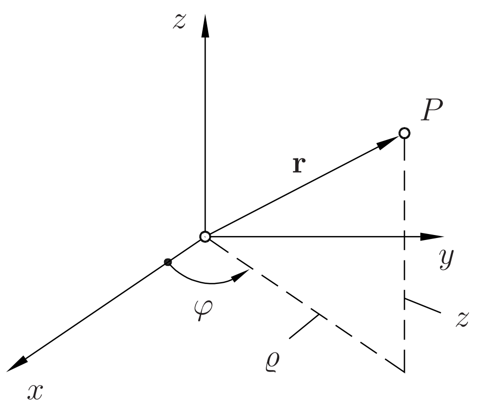
$$\mathrm{d}V = [\operatorname{grad}V]_r\,\mathrm{d}r + [\operatorname{grad}V]_\vartheta\,r\,\mathrm{d}\vartheta + [\operatorname{grad}V]_\varphi\,r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \quad .$$

Durch Vergleich der alternativen Darstellungen des totalen Differentials ergibt sich die gesuchte Form des Gradienten in Kugelkoordinaten

$$\boxed{\operatorname{grad}V(r,\vartheta,\varphi) = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\,\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\,\mathbf{e}_\varphi} \quad .$$

Aufgabe A2

Zeichne die Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) eines Punktes P in einem kartesischen Koordinatensystem ein und gib den Zusammenhang zwischen den Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) und den kartesischen Koordinaten (x, y, z) an. Welchen Wertebereich nehmen die Zylinderkoordinaten an?



$$\begin{aligned} x &= \varrho\,\cos\varphi & \quad 0 &\le \varrho < \infty \\ y &= \varrho\,\sin\varphi & \quad 0 &\le \varphi < 2\pi \\ z &= z & \quad -\infty &< z < \infty \end{aligned}$$

Aufgabe A3

Gib die Grundgleichungen der Elektrostatik in differentieller Form an und leite daraus die POISSONgleichung her.

Die Grundgleichungen der Elektrostatik lauten:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad , \quad \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = q_V \quad .$$

Die erste Gleichung erlaubt die Einführung eines Potentials

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

und nach Einsetzen in die zweite Gleichung folgt die POISSONgleichung

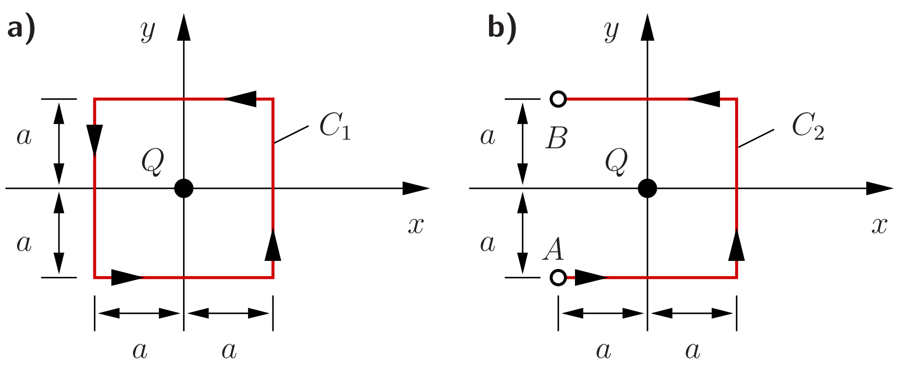
$$-\nabla \cdot (\varepsilon_0 \nabla\phi) = q_V \quad \rightarrow \quad \nabla^2\phi = -\frac{q_V}{\varepsilon_0} \quad .$$

Aufgabe A4

Am Ort $x = y = z = 0$ befinde sich eine Punktladung Q. Welcher Wert ergibt sich für

a) das Wegintegral der elektrischen Feldstärke $\oint_{C_1} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$ entlang der geschlossenen Kontur C_1 bzw.

b) das Wegintegral der elektrischen Feldstärke $\int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$ entlang der offenen Kontur C_2?

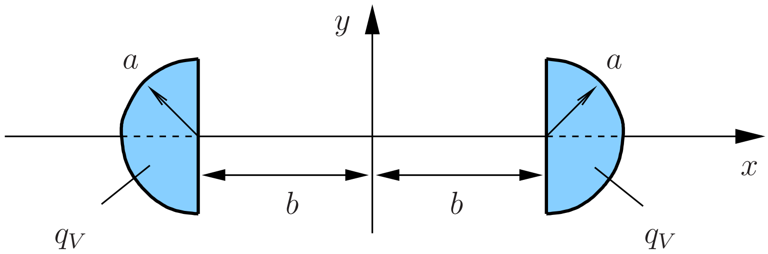


a) Es gilt $\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0$ für <u>alle</u> geschlossenen Konturen.

b) Aus Symmetriegründen gilt: $\int_A^B \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \phi(A) - \phi(B) = 0$.

Aufgabe A5

Auf der x-Achse befinden sich gemäß Abbildung zwei halbkugelförmige, homogene Raumladungen q_V im Abstand $2b$ zueinander.



Gib eine asymptotische Näherungsformel für das elektrostatische Potential $\phi(x = 0, y, z = 0)$ auf der y-Achse an, wenn y sehr groß gegenüber b ist, $y \gg b$.

In großen Entfernungen kann die Anordnung durch eine Punktladung im Ladungsschwerpunkt, d.h. im Koordinatenursprung ersetzt werden und das Potential wird damit

$$\phi(x = 0, y \gg b, z = 0) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y} \quad \text{mit} \quad Q = q_V \, \frac{4}{3}\pi a^3 \, .$$

Aufgabe A6

Vor einer **ungeladenen** Metallkugel mit einem Radius von 1 cm befinde sich in der Mittelpunktsentfernung von 2 cm eine Punktladung von $6.6 \cdot 10^{-8}$ As. Welches Potential herrscht auf der Kugeloberfläche?

Hinweis: $4\pi\varepsilon_0 \approx 1.1 \cdot 10^{-10} \, \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$

Da die Kugel ungeladen ist, wird sie durch eine Spiegelladung Q^* und eine Ladung Q_M im Mittelpunkt ersetzt:

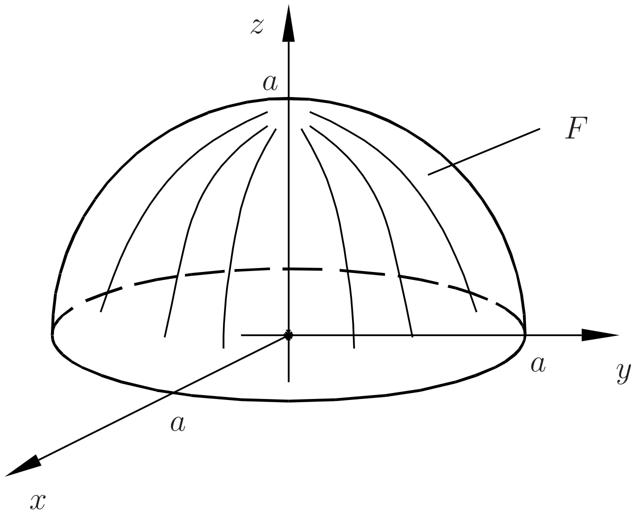
$$Q^* = -Q_M = -6.6 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{As}\,\frac{1\,\mathrm{cm}}{2\,\mathrm{cm}} = -3.3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{As}$$

Das Potential auf der Kugeloberfläche entspricht dem Potential der Mittelpunktsladung im Abstand von 1 cm:

$$\phi = \frac{3.3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{As}}{1.1 \cdot 10^{-10}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}\,10^{-2}\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{30\,\mathrm{kV}}}$$

Aufgabe B1

Es sei $\mathbf{r}$ der Ortsvektor. Ferner sei F die obere Hälfte der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius a, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liege.



Berechne das Flächenintegral $\int_F [\nabla \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r})] \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{F}$.

- Direkte Berechnung des Flächenintegrals:

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{r} = \mathbf{e}_z \times (x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z) = x\,\mathbf{e}_y - y\,\mathbf{e}_x$$

$$\nabla \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\,\mathbf{e}_z$$

oder auch mit der Backminuszapp-Regel

$$\nabla \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{r}}_{3} - \underbrace{(\mathbf{e}_z \cdot \nabla)}_{\partial/\partial z}\,\mathbf{r} = 2\,\mathbf{e}_z \ .$$

Mit $\mathrm{d}\mathbf{F} = a^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r = \cos\vartheta$ folgt

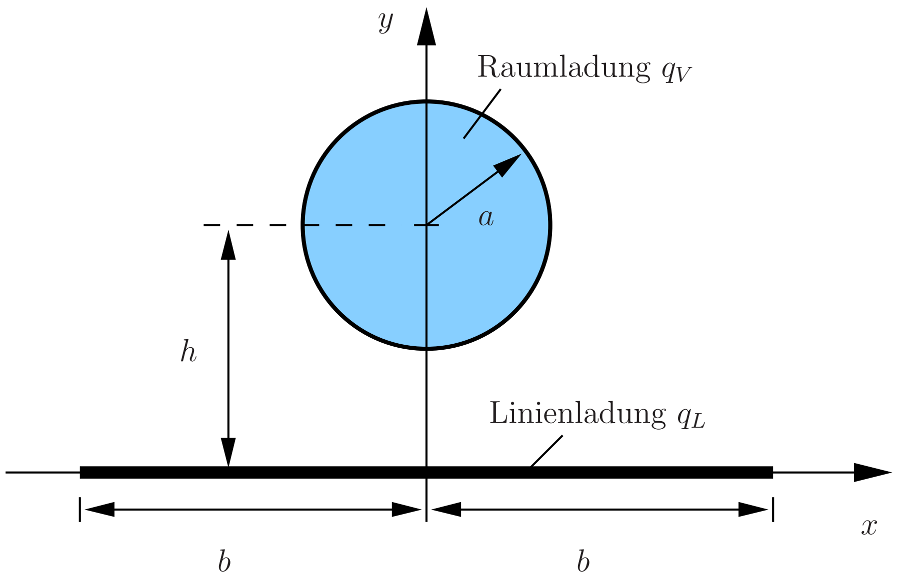
$$\int_F \nabla \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{F} = 2a^2\,2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = 4\pi a^2 \left.\frac{\sin^2\vartheta}{2}\right|_0^{\pi/2} = \underline{\underline{2\pi a^2}}$$

- Berechnung mit Hilfe von Stokes:

$$\int_F \nabla \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{F} = \oint_{\partial F} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \,\mathrm{d}\mathbf{s} = a \int_0^{2\pi} (\mathbf{e}_z \times xa\,\mathbf{e}_\varrho) \cdot \mathbf{e}_\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \underline{\underline{2\pi a^2}}$$

Aufgabe B2

In der Höhe h über einer Linienladung mit der homogenen Dichte q_L und der Länge $2b$ befinde sich eine kugelförmige Raumladung mit der homogenen Dichte q_V und mit dem Radius a. Bestimme die Kraft auf die Linienladung.



Hinweis: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}^3} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$

Die Raumladung kann zunächst durch eine Punktladung

$$Q = q_V \, \frac{4}{3} \, \pi a^3$$

in ihrem Mittelpunkt ersetzt werden. An einer Stelle x' der Linienladung erzeugt die Raumladung dann die elektrische Feldstärke

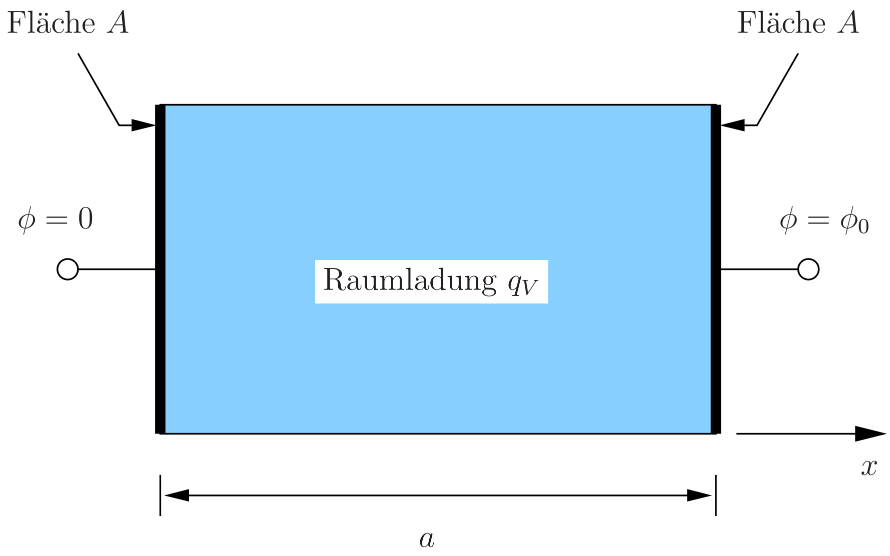
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = x' \, \mathbf{e}_x - h \, \mathbf{e}_y \quad , \quad R = \sqrt{x'^2 + h^2} \; .$$

Die Kraft auf die gesamte Linienladung zeigt aus Symmetriegründen nur in y-Richtung

$$F_y = 2 \, q_L \int_0^b \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_y \; \mathrm{d}x' = -2 \, \frac{Q q_L h}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{x'^2+h^2}^3} \; \mathrm{d}x' = -\frac{Q q_L}{2\pi\varepsilon_0} \, \frac{b}{h\sqrt{b^2+h^2}} \; .$$

Aufgabe B3

Der Bereich zwischen zwei parallel angeordneten Elektroden mit der Fläche A und dem Abstand a sei homogen mit einer Raumladung der Dichte q_V gefüllt. Die linke Elektrode habe das Potential $\phi = 0$ und die rechte Elektrode habe das Potential $\phi = \phi_0$.



Bestimme das Potential im Raumladungsbereich unter der Voraussetzung, daß das Potential nur von der Koordinate x abhängig ist. Welche Ladung befindet sich auf der rechten Elektrode?

Es gilt die POISSONgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{q_V}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \phi(x) = A + B\,\frac{x}{a} - \frac{q_V a^2}{2\varepsilon_0}\,\frac{x^2}{a^2}\,.$$

Randbedingungen:

$$\phi(x=0) = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0$$

$$\phi(x=a) = \phi_0 \quad \rightarrow \quad B = \phi_0 + \frac{q_V a^2}{2\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\phi(x) = \phi_0\,\frac{x}{a} + \frac{q_V a^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right)}$$

Ladung auf der rechten Platte:

$$Q = +\varepsilon_0\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\,A \quad \rightarrow \quad \boxed{Q = \left(\frac{\varepsilon_0\phi_0}{a} - \frac{q_V a}{2}\right)A}$$