

allgemeine Fragen zum Thema

# Vektoranalysis

AA01...02

**AA01** Welches der folgenden Vektorfelder kann durch ein skalares Potential bzw. durch ein Vektorpotential dargestellt werden?

$$\text{a) } \mathbf{F} = \frac{\mathbf{e}_x}{x^2} \quad \text{b) } \mathbf{F} = \frac{\mathbf{e}_y}{x^2}$$

Die Antwort ist zu begründen!

**AA02** Man gebe die Definitionen von Divergenz und Rotation als Grenzübergänge von Oberflächen- bzw. Kreisintegralen an.

Übungsaufgaben zum Thema

# Vektoranalysis

AR01...07

**AR01** Es sei  $\mathbf{r}$  der Ortsvektor und  $\mathbf{a}$  ein örtlich konstanter Vektor. Es ist folgende Identität nachzuweisen:

$$\nabla \cdot \{\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})\} = -2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$$

*Hinweis:*

Verwende die Regel  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ .

**AR02** Es sei  $\mathcal{O}$  eine das Volumen  $V$  umschließende Hüllfläche. Man beweise mit Hilfe des Gaußschen Satzes, daß für beliebige Volumina

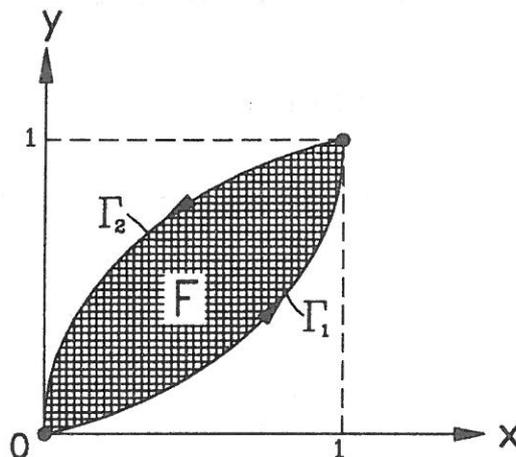
$$\oint \mathbf{r} \cdot d\mathcal{O} = 3V$$

gilt, wobei  $\mathbf{r}$  der Ortsvektor ist.

**AR03** Die beiden Parabeln  $y^2 = x$  und  $y = x^2$  begrenzen im Bereich  $0 \leq x, y \leq 1$  das Gebiet  $F$ . Man bestätige den Stokesschen Satz für das Vektorfeld

$$\mathbf{A} = (2x - x^2)\mathbf{e}_x + (x + y^2)\mathbf{e}_y$$

auf der Fläche  $F$  mit der Berandung  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ .



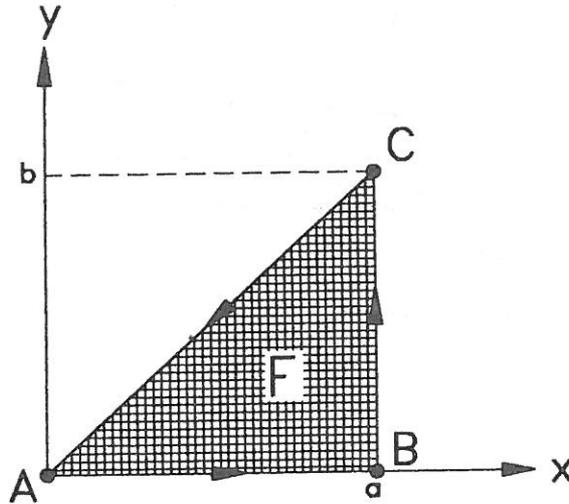
**AR04** a) Beweise, daß  $\mathbf{A} = (2xz^3 + 6y)\mathbf{e}_x + (6x - 2yz)\mathbf{e}_y + (3x^2z^2 - y^2)\mathbf{e}_z$  ein konservatives Feld ist.

b) Berechne  $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$  mit  $P_1 = (1, -1, 1)$  und  $P_2 = (2, 1, -1)$ .

c) Welche physikalische Deutung der Ergebnisse ist möglich?

**AR05** Gegeben sei das zweidimensionale Feld  $E_x = 2bxy$ ,  $E_y = x^2 + ay^2$ .

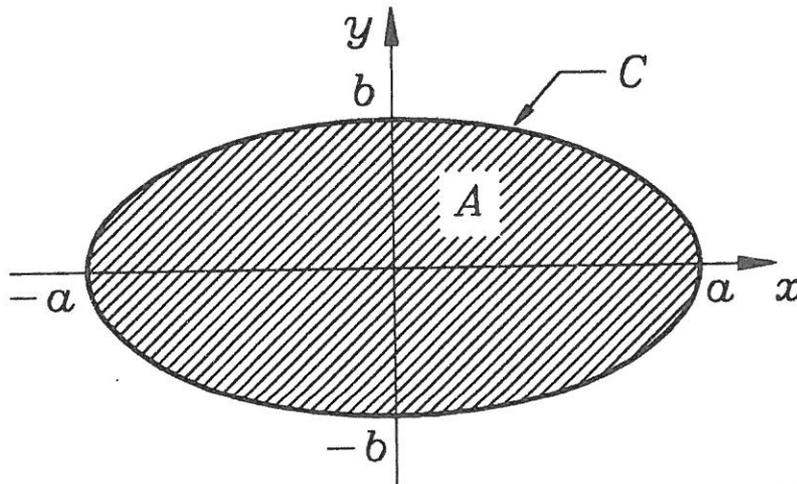
- Man verifiziere den Stokesschen Satz, indem man das Umlaufintegral  $ABCA$  und das Flächenintegral über die Fläche  $F$  bildet.
- Wie müssen die Konstanten  $a$ ,  $b$  gewählt werden, damit das Feld quellen- und wirbelfrei wird? Für diesen Fall bestimme man das zugehörige Potential.



**AR06** Berechne den Flächeninhalt  $A$  der Ellipse

$$x = a \cos t \quad , \quad y = b \sin t \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

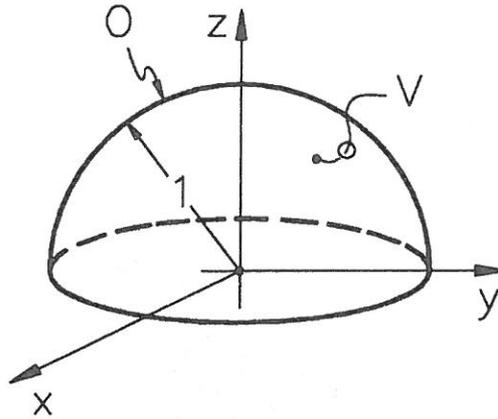
durch Konturintegration über die Berandung  $C$ . (*Hinweis*: Satz von Stokes!)

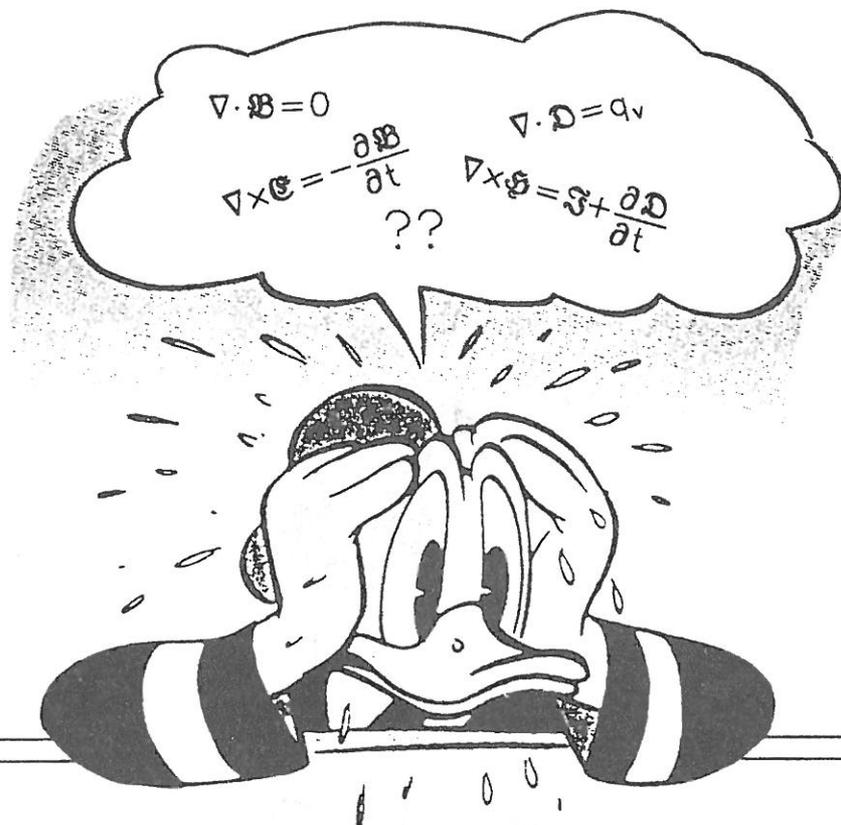


AR07 Man verifiziere den Gaußschen Satz für das Vektorfeld

$$\mathbf{A} = (x + z) \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + (z - x) \mathbf{e}_z$$

und ein halbkugelförmiges Volumen, das durch  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  und die Ebene  $z = 0$  begrenzt wird!

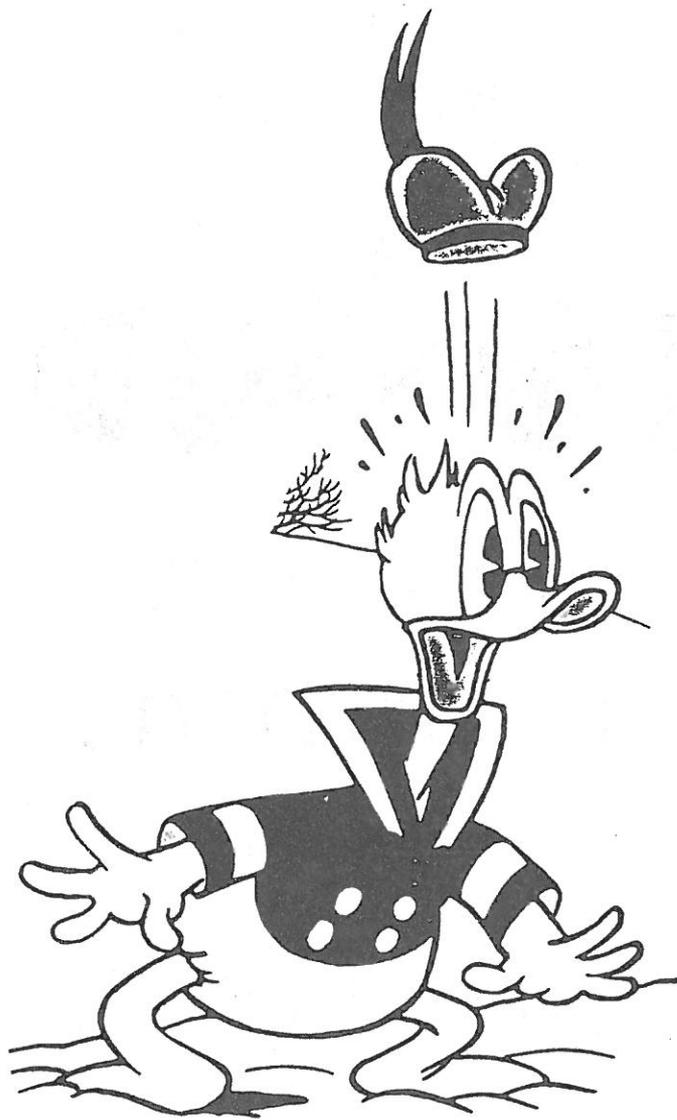




# Aufgaben- sammlung

zur Vorlesung

# Theoretische Elektrotechnik



allgemeine Fragen zum Thema

# Elektrostatik

EA01...13

**EA01** Welche Randbedingungen gelten für das elektrische Feld an

- a) Leiteroberflächen ( $\kappa = \infty$ )?
- b) Sprungstellen der Dielektrizitätskonstanten?

**EA02** Wie lautet die integrale Form des Gesetzes  $\nabla \cdot \mathbf{D} = q_V$  und welche Schlußfolgerungen lassen sich daraus für das Verhalten der Normalkomponente der elektrischen Feldstärke an Leiteroberflächen und an Sprungstellen der Dielektrizitätskonstanten ziehen?

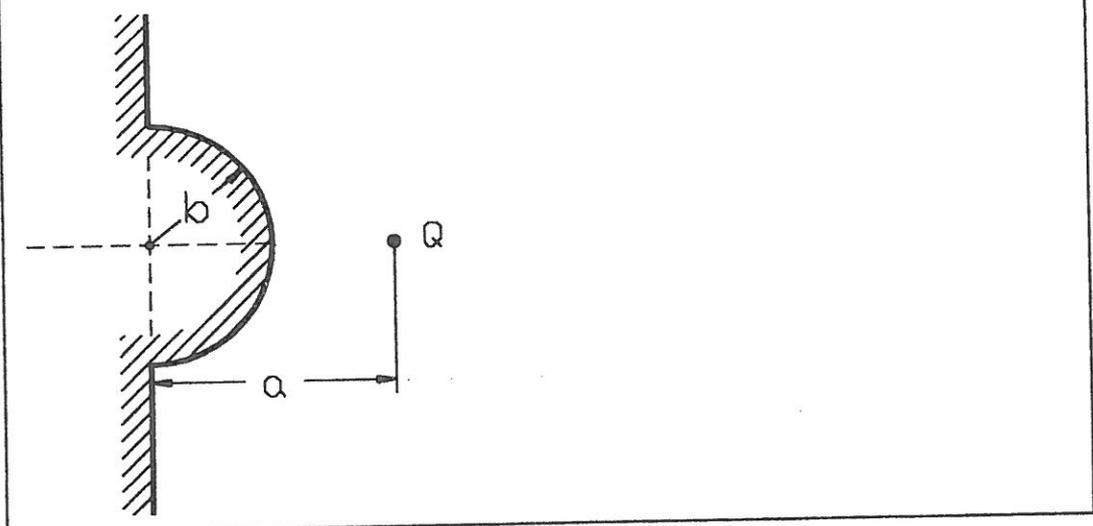
**EA03** Welche Kraft wirkt auf die Platten eines Plattenkondensators?  
Man erläutere das Ergebnis physikalisch!

**EA04** Welche Kraft wirkt auf eine Probeladung  $Q$ , die sich auf einer unendlich ausgedehnten, geladenen Platte mit der homogenen Flächenladungsdichte  $q_{F0}$  befindet?

**EA05** Welche Gesamtladung wird in einer leitenden Kugel vom Radius  $R$  induziert, wenn sich eine Punktladung  $Q$  außerhalb der Kugel im Abstand  $d$  befindet und die Kugel

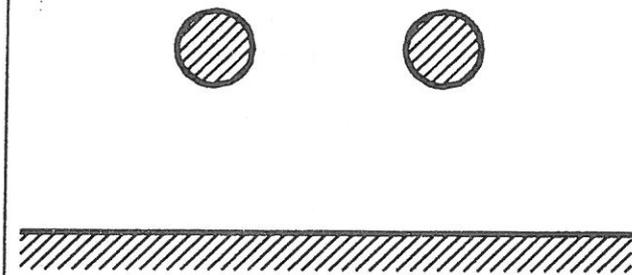
- a) sich isoliert im Raum befindet ?
- b) geerdet ist ?

**EA06** Man gebe die Spiegellersatzanordnung für eine Punktladung  $Q$  vor einer leitenden Ebene mit halbkugelförmiger Ausbeulung vom Radius  $b$  an.



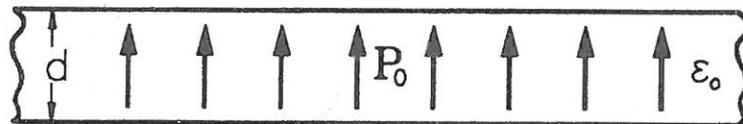
- EA07** Gegeben sind zwei Punktladungen  $Q$  und  $kQ$ . Wie muß der Faktor  $k$  gewählt werden, damit
- in der Mittelebene zwischen den Ladungen die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke verschwindet?
  - die Äquipotentialfläche  $\phi = 0$  die Ladung  $Q$  kugelförmig umschließt?

- EA08** a) Für eine Doppelleitung über einem leitenden Halbraum sind alle Teilkapazitäten einzuzeichnen.  
b) Wie lautet die Betriebskapazität, wenn ein Leiter das Potential  $\phi_1$  und der andere Leiter das Potential  $\phi = 0$  aufweist?



- EA09** Eine Anordnung aus zwei Elektroden habe die Kapazität  $C_{12}$ . Die Anordnung wird mit einer leitenden geerdeten Hülle umgeben. Man berechne die Spannung zwischen den Elektroden und die induzierte Gesamtladung der Hülle, wenn Leiter 1 die Ladung  $Q_1$  und die Kapazität  $C_\infty$  zur Hülle aufweist und Leiter 2 entsprechend die Ladung  $Q_2$  und die Kapazität  $C_\infty$  zur Hülle.

- EA10** Eine unendlich ausgedehnte Platte der Dicke  $d$  habe die konstante Polarisierung  $P_0$ . Wie groß ist die elektrische Feldstärke und die dielektrische Verschiebung innerhalb und außerhalb der Platte?



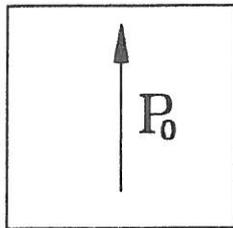
- EA11** Gegeben ist eine dielektrische Kugel (Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$ ) im homogenen elektrischen Feld. Innerhalb der Kugel herrscht das ebenfalls homogene elektrische Feld  $E_i$ .

- Gib die Polarisation  $\mathbf{P}$  der Kugel an!
- Wo und in welcher Form treten Polarisationsladungen auf?

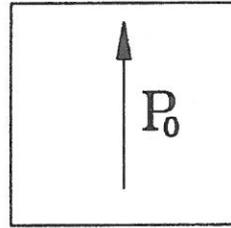
EA12 Skizziere

- a) die elektrischen Feldlinien
- b) die dielektrischen Verschiebungslinien

für einen homogen polarisierten Stab.



a)

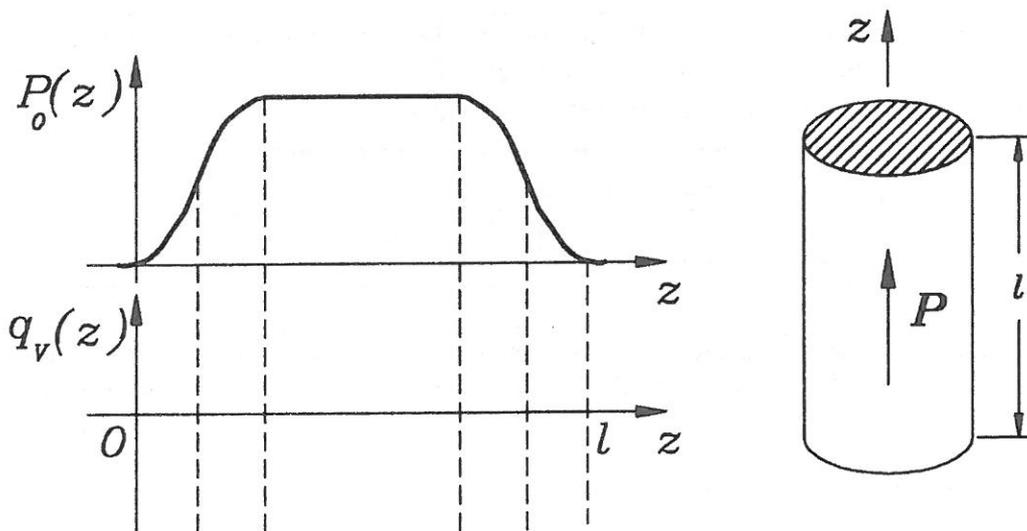


b)

EA13 Ein Stab der Länge  $l$  sei in  $z$ -Richtung polarisiert. Die Polarisation hänge nur von der Koordinate  $z$  ab

$$\mathbf{P} = P_0(z) \mathbf{e}_z$$

Zeichne für die unten dargestellte Polarisation  $P_0(z)$  den qualitativen Verlauf der Polarisationsraumladungsdichte ein.



Übungsaufgaben zum Thema

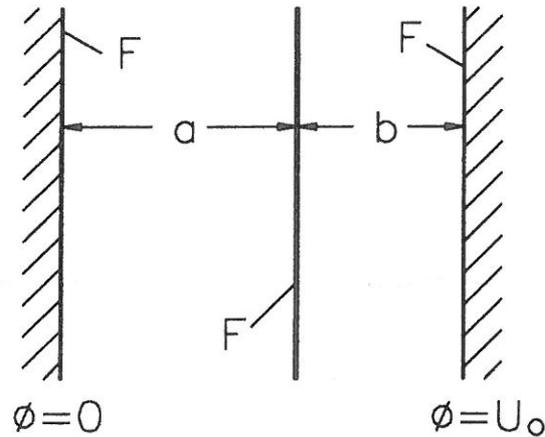
# Elektrostatik

ER01...24

**ER01** Im Luftzwischenraum eines ebenen Plattenkondensators (Plattenfläche  $F$ , Abstand  $d$  und Randeffekte vernachlässigt) befindet sich isoliert eine weitere Platte gleicher Fläche, die die Ladung  $Q$  trägt.

a) Wie lautet das elektrische Feld im Kondensator, wenn zwischen den Platten die Spannung  $U_0$  liegt?

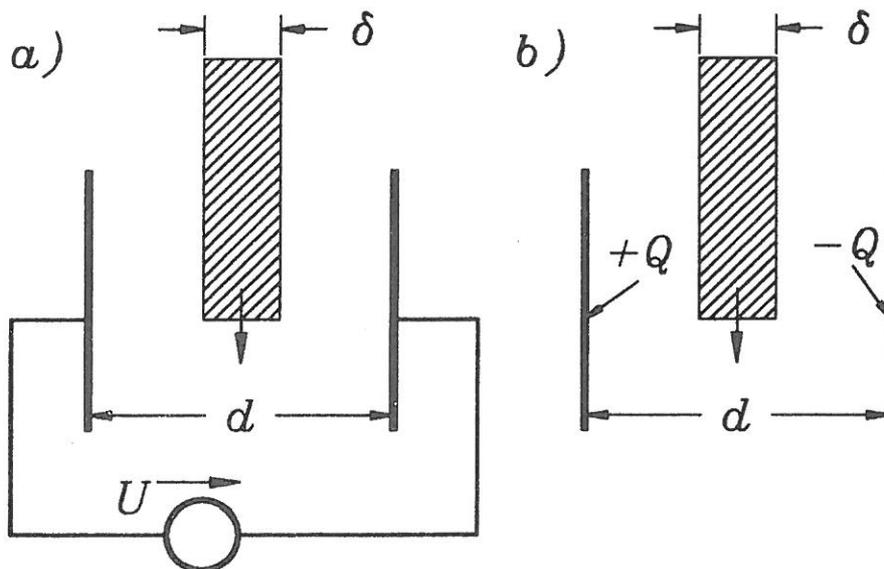
b) Welche Kraft wirkt auf die mittlere Platte?



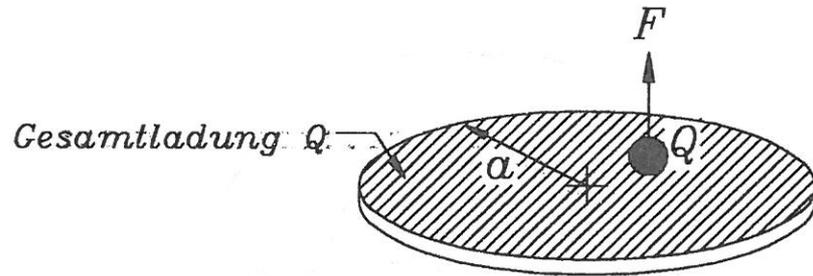
**ER02** Gegeben ist ein idealer Plattenkondensator der Fläche  $A$  und mit dem Plattenabstand  $d$ . Um welchen Faktor ändert sich die im Kondensator gespeicherte Energie, wenn zwischen die Kondensatorplatten eine ungeladene Platte der Dicke  $\delta < d$  vollständig eingeführt wird und

a) die Kondensatorspannung  $U$  konstant gehalten wird?

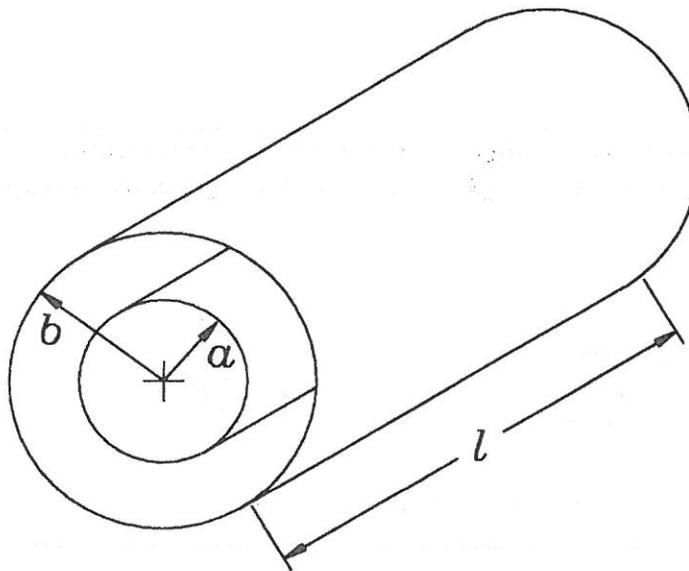
b) die Kondensatorladung  $Q$  konstant gehalten wird?



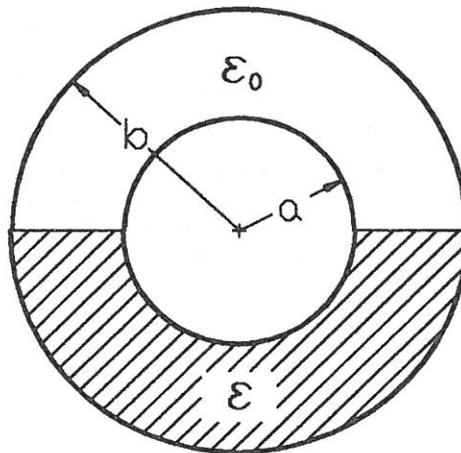
**ER03** Gegeben ist eine kreisförmige dünne Scheibe vom Radius  $a$ , die homogen mit der Gesamtladung  $Q$  belegt ist. Mit welcher Kraft senkrecht zur Scheibe wird eine Punktladung  $Q$  abgestoßen, die sich auf dieser Scheibe befindet?



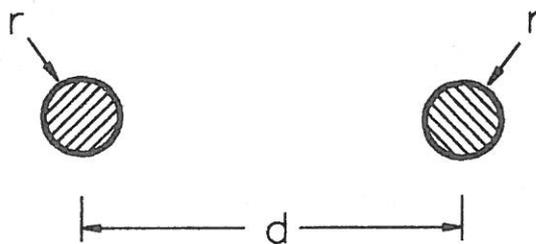
**ER04** Berechne die Kapazität eines Koaxialkabels mit Innenradius  $a$ , Außenradius  $b$  und mit der Länge  $l$ . Randeffekte am Kabelende sind zu vernachlässigen.



**ER05** Bestimme die Kapazität pro Längeneinheit eines unendlich langen Zylinderkondensators mit Innenradius  $a$  und Außenradius  $b$ , der zur Hälfte mit Dielektrikum  $\epsilon \neq \epsilon_0$  gefüllt ist.



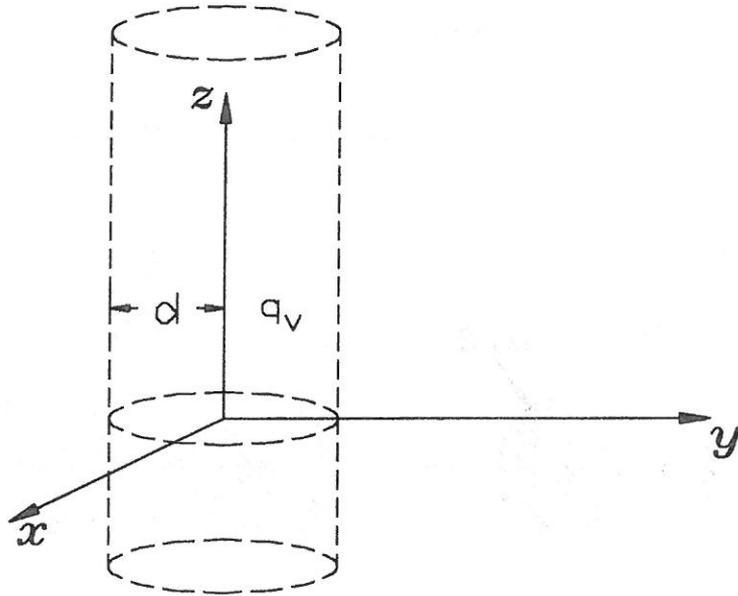
**ER06** Berechne die Kapazität pro Längeneinheit einer aus zwei dünnen Drähten (Radius  $r$ , Abstand  $d$ ) bestehenden unendlich langen Doppelleitung mit  $r \ll d$ .



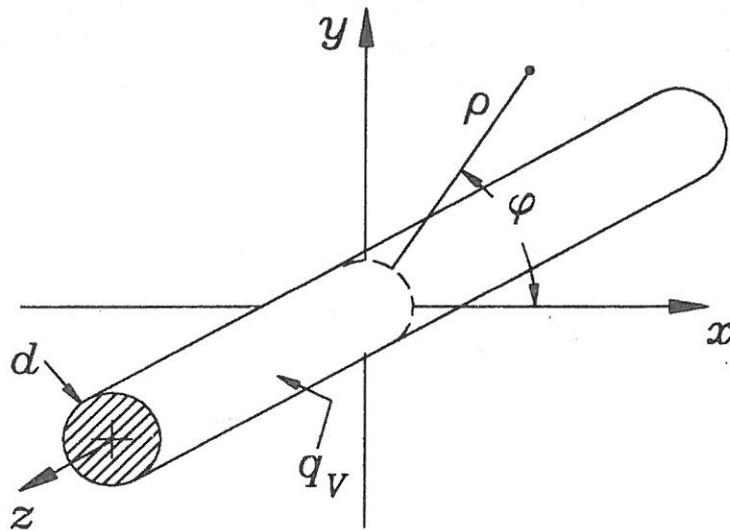
**ER07** Ein zylindersymmetrischer Elektronenstrahl habe die Ladungsverteilung

$$q_v = q_{v0} \left( 1 + \frac{\rho^2}{d^2} \right)$$

für  $\rho \leq d$ . Man bestimme das elektrische Feld innerhalb und außerhalb des Strahls.



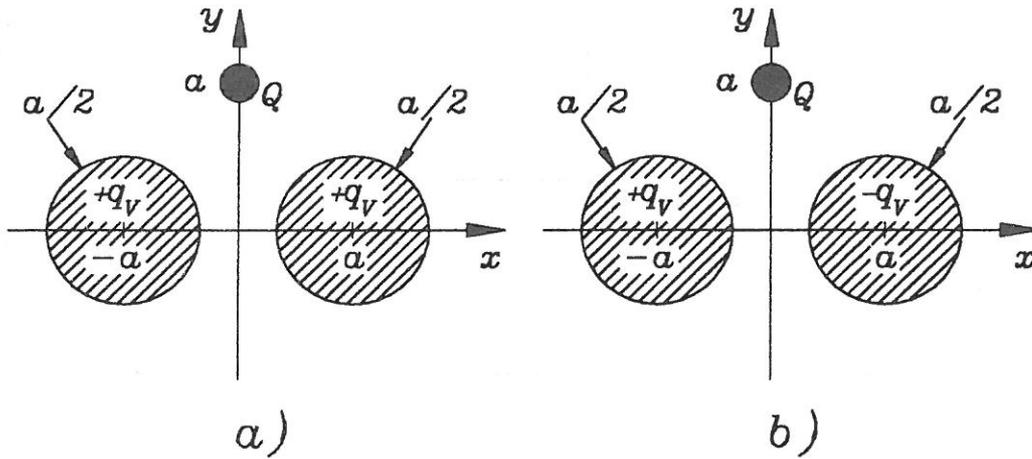
**ER08** In Zylinderkoordinaten sei der Bereich  $0 \leq \rho \leq d$  mit der Raumladungsdichte  $q_v = q_{v0}\rho/d$  belegt. Berechne das elektrische Feld innerhalb und außerhalb der Raumladung.



**ER09** Welche Kraft wirkt auf eine Punktladung  $Q$  am Ort  $(x, y, z) = (0, a, 0)$ , wenn auf der  $x$ -Achse

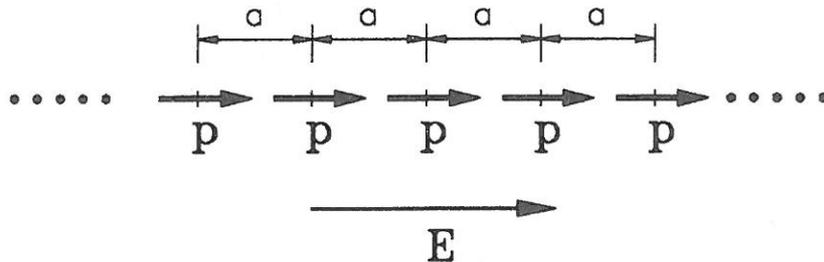
- a) zwei gleichnamige, homogene, kugelförmige Raumladungen der Dichte  $q_V$
- b) zwei ungleichnamige, homogene, kugelförmige Raumladungen der Dichte  $\pm q_V$

in den Punkten  $x = \pm a$  angeordnet sind. Der Radius der Raumladungen sei  $a/2$ .



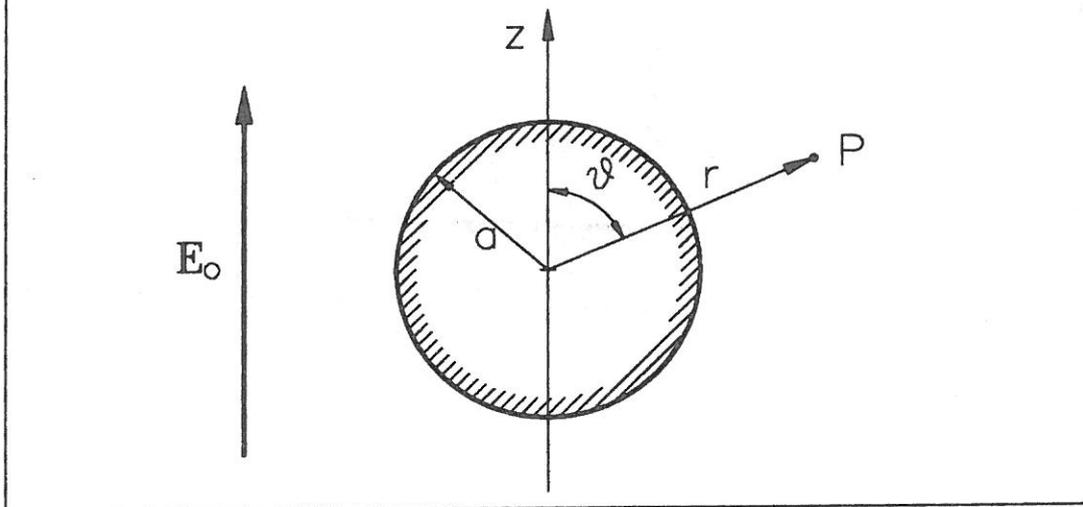
**ER10** In einem äußeren homogenen Feld der Stärke  $E$  befindet sich eine unendlich lange Dipolkette. Bestimme das elektrische Feld am Ort eines einzelnen Dipols infolge der übrigen Dipole und des äußeren Feldes.

*Hinweis:*  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} \approx 1.202$

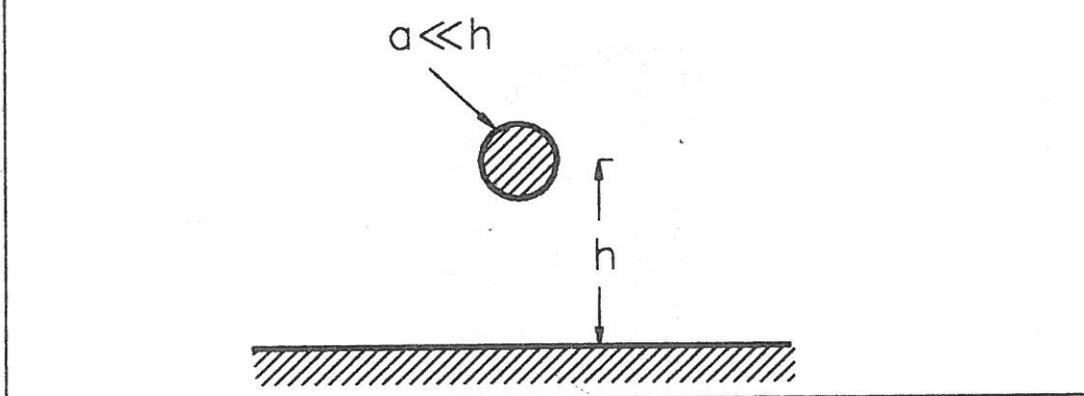


**ER11** Bestimme die Ladungsverteilung auf einer leitenden Kugel, die in ein ursprünglich homogenes elektrisches Feld der Stärke  $E_0$  eingebracht wird.

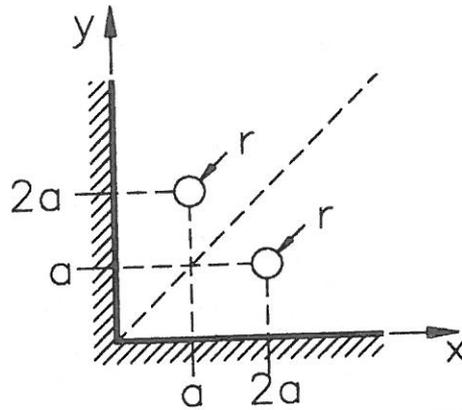
*Hinweis:* Das Störfeld der Kugel kann proportional zu einem Dipolfeld angesetzt werden.



**ER12** Man bestimme die Kapazität pro Längeneinheit eines unendlich langen, dünnen, leitenden Drahtes vom Radius  $a$ , der in der Höhe  $h$  über einer leitenden Ebene verläuft.

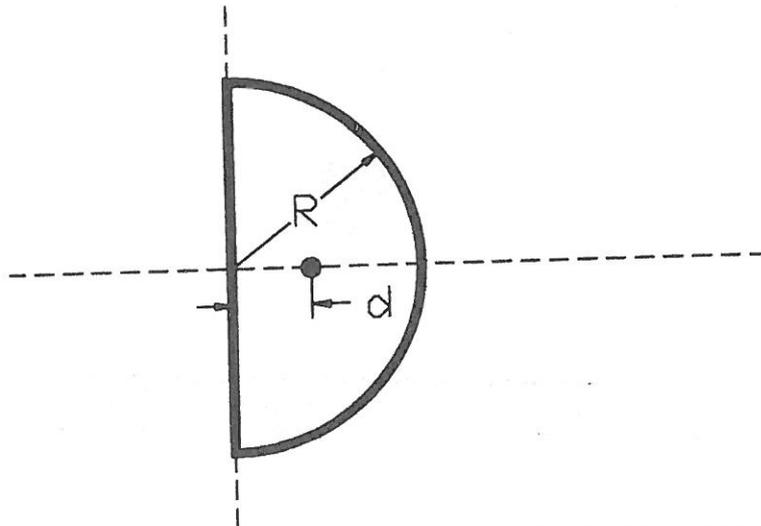


**ER13** Vor einer leitenden geerdeten Ecke sind gemäß Abbildung zwei kleine leitende Kugeln mit dem Radius  $r \ll a$  angeordnet. Wie groß ist die Kapazität zwischen den Kugeln?

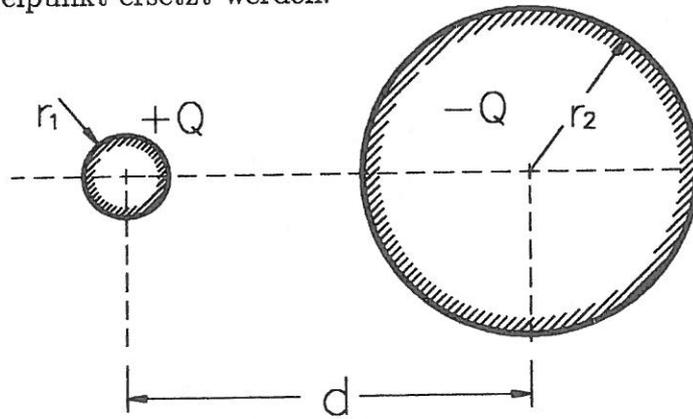


**ER14** Gegeben ist eine geerdete leitende Hohlkugel, in deren Inneren sich eine Punktladung  $Q$  befindet.

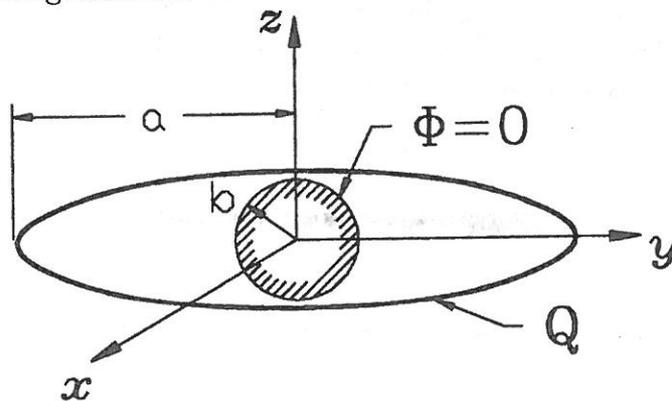
- Man gebe eine Ersatzanordnung von Punktladungen an, die im Bereich der Halbkugel das gleiche Potential erzeugt.
- Wie groß ist die Kraft, die auf die Ladung  $Q$  wirkt?



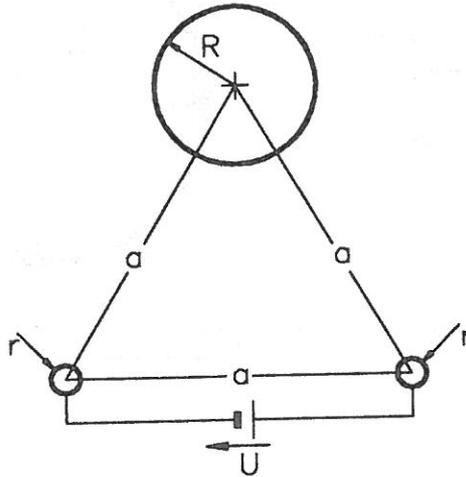
- ER15** Gegeben sei eine sehr kleine metallische Kugel mit Radius  $r_1$  und eine große mit Radius  $r_2$  in einem gegenseitigen Abstand  $d$ . Die Kugeln tragen entgegengesetzt gleiche Ladungen  $\pm Q$ . Man bestimme die Kapazität der Anordnung.  
*Hinweis:* Das Feld der kleinen Kugel kann durch das Feld einer Punktladung im Kugelmittelpunkt ersetzt werden.



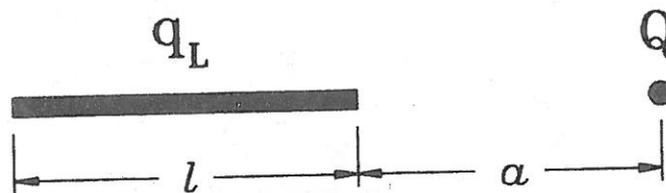
- ER16** In der Ebene  $z = 0$  befindet sich eine kreisförmige Linienladung mit der Gesamtladung  $Q$  und dem Radius  $a$ . Man berechne das elektrische Feld auf der  $z$ -Achse, wenn sich eine leitende, geerdete Kugel mit dem Radius  $b < a$  im Koordinatenursprung befindet.



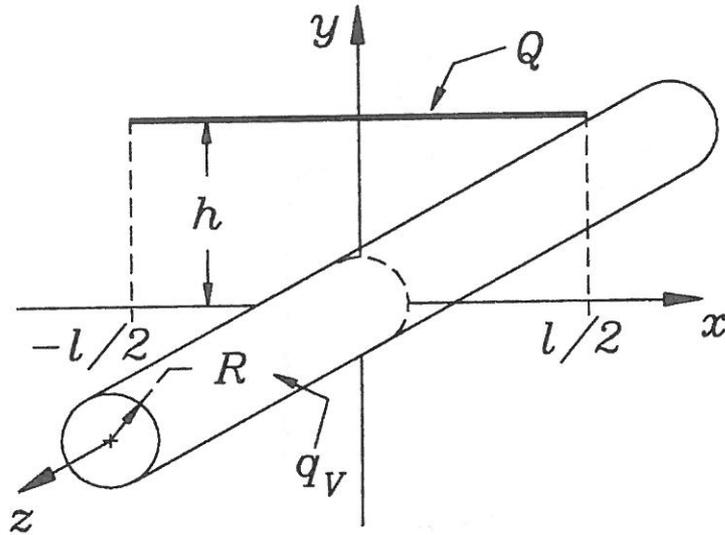
**ER17** Zwischen zwei sehr kleine metallische Kugeln vom Radius  $r$  und mit dem Abstand  $a \gg r$  voneinander wird eine Spannung  $U$  angelegt. Um welchen Faktor ändert sich die Kapazität zwischen den Kugeln, wenn gemäß Bild eine große ungeladene metallische Kugel vom Radius  $R$ , mit  $a - R \gg r$ , eingebracht wird?



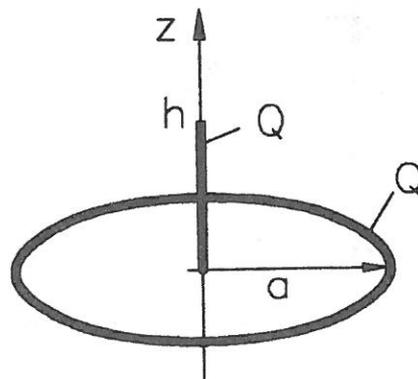
**ER18** Eine Punktladung  $Q$  befindet sich im Abstand  $a$  von einer Linienladung der Länge  $l$  und Gesamtladung  $Q_L$ . Wie groß ist die Kraft, die auf die Punktladung ausgeübt wird?



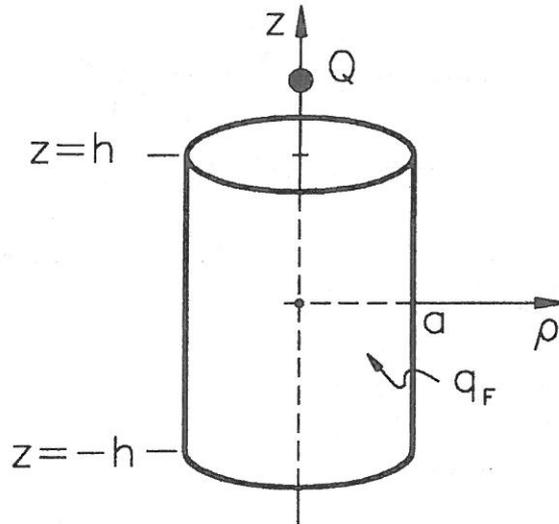
- ER19** Eine Raumladung ist homogen mit der Dichte  $q_V$  in einem unendlich langen Zylinder vom Radius  $R$  verteilt. In der Höhe  $h$  darüber wird rechtwinklig zur Zylinderachse ein gleichmäßig mit der Gesamtladung  $Q$  geladener Stab der Länge  $l$  angeordnet. Berechne die Kraft auf den Stab!



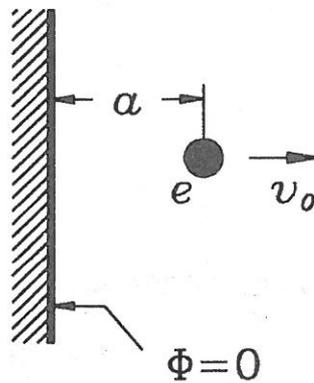
- ER20** Auf einem Ring mit dem Radius  $a$  ist die Gesamtladung  $Q$  homogen verteilt. Welche Kraft wirkt auf eine homogene Linienladung, die auf der  $z$ -Achse im Bereich  $0 \leq z \leq h$  angeordnet ist und ebenfalls die Gesamtladung  $Q$  hat?



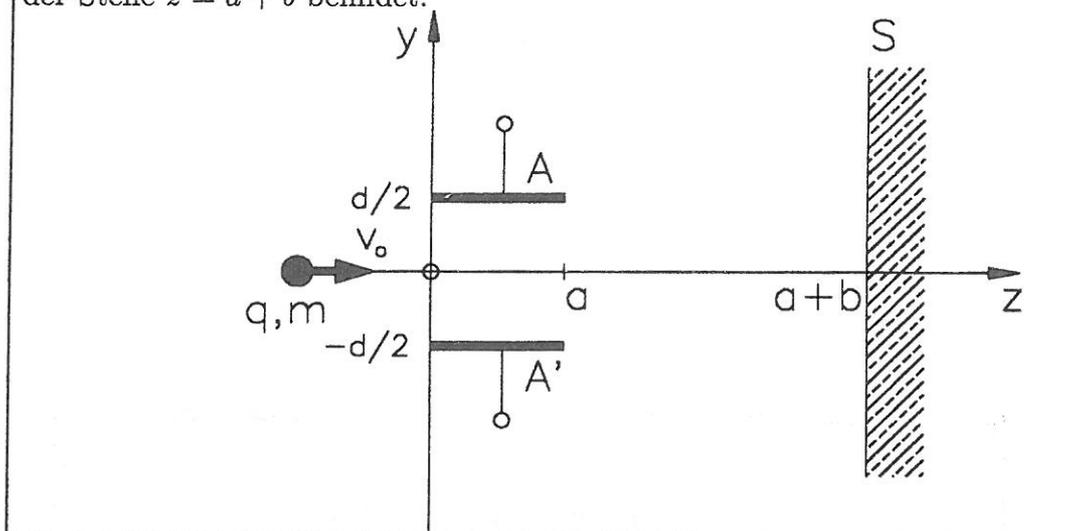
- ER21** Gegeben ist eine Flächenladung  $q_F$ , die homogen auf einem Zylinder mit dem Radius  $a$  und der Höhe  $2h$  verteilt ist. Welche Kraft wirkt auf eine Probeladung, die irgendwo auf der Rotationsachse angeordnet wird?



- ER22** Ein Elektron (Ladung  $-e$ , Masse  $m_e$ ) befinde sich im Abstand  $a$  vor einer unendlich ausgedehnten leitenden geerdeten Platte. Welche Anfangsgeschwindigkeit benötigt es, um ins Unendliche befördert zu werden?

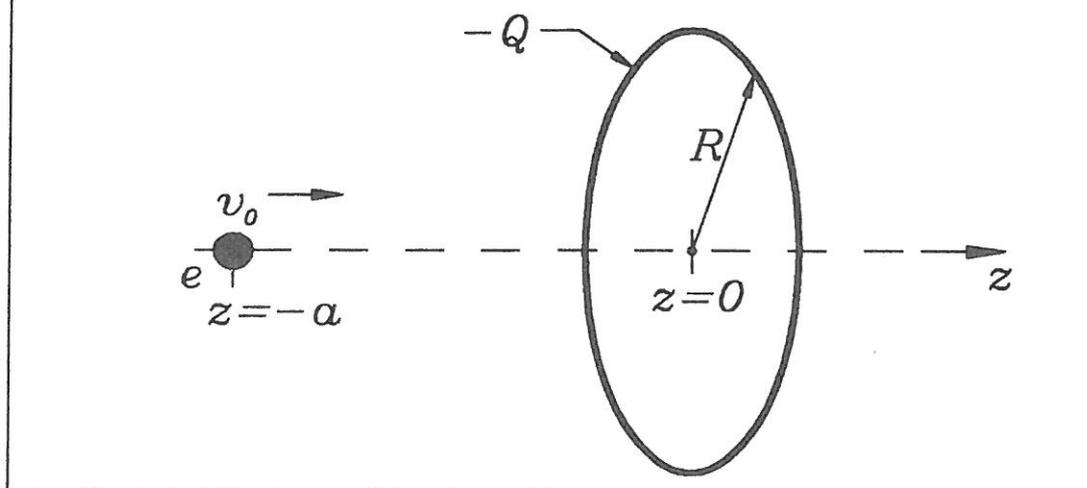


- ER23** Ein Elektron mit der Ladung  $q$  und der Masse  $m$  tritt an der Stelle  $y = 0$ ,  $z = 0$  mit der Geschwindigkeit  $v_0$  in das homogene Feld zweier Ablenkelektroden  $A$  und  $A'$  mit den Potentialen  $\phi_A$  und  $\phi_{A'}$  ein. Berechne den Auftreffpunkt  $y_0$  des Elektrons auf dem Schirm  $S$ , der sich an der Stelle  $z = a + b$  befindet.



- ER24** Ein Elektron (Masse  $m_e$ ) bewege sich geradlinig auf der  $z$ -Achse. Konzentrisch um die  $z$ -Achse ist am Ort  $z = 0$  ein ringförmiger Draht mit dem Radius  $R$  und der Gesamtladung  $-Q$  angeordnet ( $Q > 0$ ). Welche Mindestgeschwindigkeit  $v_0$  benötigt das Elektron im Punkt  $z = -a$ , um durch den Ring hindurchzufiegen?

*Hinweis:* Berechne den Energieverlust des Elektrons im Bereich  $-a \leq z \leq 0$  und wende den Energiesatz an!



allgemeine Fragen zum Thema

# stationäres Strömungsfeld

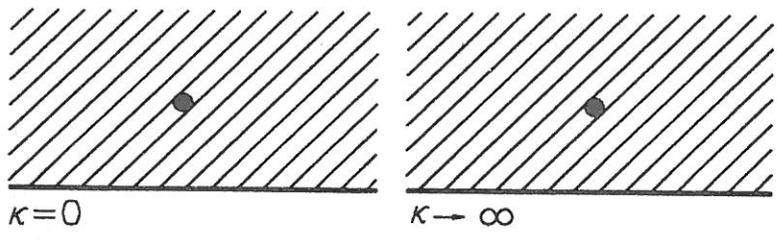
SA01...05

**SA01** Das stationäre Strömungsfeld weist Analogien zum elektrostatischen Feld auf.  
 Welche Größen sind analog zur elektrischen Leitfähigkeit  $\kappa$  und zur dielektrischen Verschiebung  $\mathbf{D}$ ?

**SA02** Eine punktförmige Stromquelle befinde sich im oberen Halbraum der Leitfähigkeit  $\kappa$  im Abstand  $a$  von der Trennfläche. Man skizziere den Verlauf der Stromlinien, wenn der untere Halbraum

a) nichtleitend  
 b) perfekt leitend ( $\kappa \rightarrow \infty$ )

ist.



**SA03** Wie lauten im stationären Strömungsfeld die Stetigkeitsbedingungen für die Komponenten der Stromdichte  $\mathbf{J}$  an der Trennfläche zwischen zwei Gebieten der Leitfähigkeit  $\kappa_1$  bzw.  $\kappa_2$ ? Aus welchen physikalischen Gesetzen folgen die Bedingungen?

**SA04** Leite aus den Maxwell'schen Gleichungen die Kontinuitätsgleichung her!

**SA05** Zeige ausgehend von der Kontinuitätsgleichung, daß eine anfänglich in einem leitenden Medium vorhandene Raumladung  $q_{V0}$  exponentiell mit der Zeit abklingt. Wie ist dabei die Relaxationszeit definiert?

allgemeine Fragen zum Thema

# Magnetostatik

MA01...11

MA01 Unter welchen Voraussetzungen darf das magnetische Feld  $\mathbf{H}$  durch den Gradienten einer skalaren Funktion dargestellt werden ?

MA02 Leite aus den Grundgleichungen der Magnetostatik die Differentialgleichung für das divergenzfreie Vektorpotential her, wenn der gesamte Raum die konstante Permeabilität  $\mu_0$  hat.

MA03 Wie läßt sich der magnetische Fluß, der eine beliebige, geschlossene Leiterschleife im äußeren magnetischen Feld der Induktion  $\mathbf{B}$  durchsetzt, durch Konturintegration über die Leiterschleife berechnen?

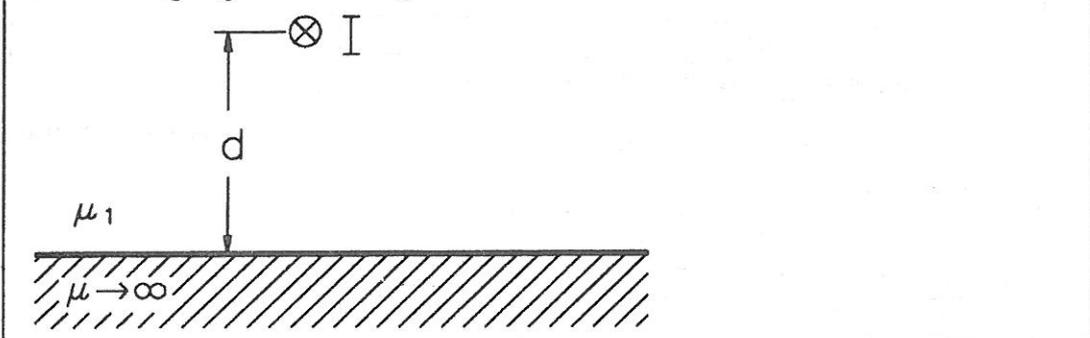
MA04

- Gib die Definition für einen  $x$ -gerichteten magnetischen Dipol an.
- Wie hängt das magnetische Feld vom Abstand  $r$  ab?
- Begründe, warum das Dipolfeld sowohl durch das magnetische Vektorpotential als auch durch den Gradienten eines skalaren Potentials dargestellt werden kann.

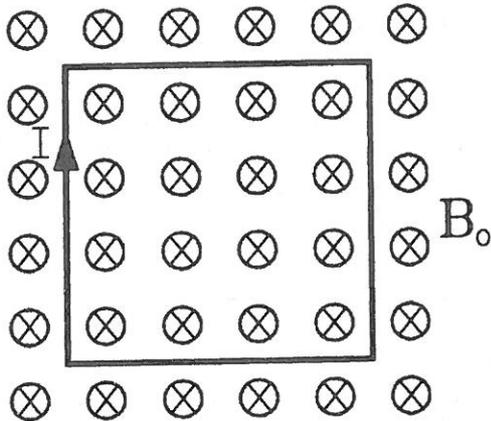
MA05 Unter welchen Umständen besitzt die magnetische Feldstärke  $\mathbf{H}$  Sprünge in ihrer Normal- oder Tangentialkomponente?  
Welche physikalischen Erfahrungssätze liegen dem zugrunde?

MA06 Die Fläche  $F$  trenne zwei Teilräume der Permeabilitäten  $\mu_1$  und  $\mu_2$ . In der Trennfläche fließe der Flächenstrom  $\mathbf{i}'$ . Wie lauten die Stetigkeitsbedingungen für die magnetische Feldstärke und die magnetische Induktion?  
Aus welchen Grundgesetzen folgen die Bedingungen?

MA07 Ein dünner stromführender Leiter befindet sich über einem hochpermeablen Halbraum ( $\mu_r \rightarrow \infty$ ). Wie muß ein Spiegelstrom angeordnet sein, um die Randbedingung für das magnetische Feld zu erfüllen?



MA08 Eine quadratische Leiterschleife der Kantenlänge  $a$  befindet sich in einem homogenen magnetischen Feld  $B_0$  und wird vom Strom  $I$  durchflossen. Wie groß ist die Kraft, die auf einen Schenkel wirkt, und in welche Richtung zeigt sie?



MA09 Gegeben ist ein axial homogen magnetisierter Stabmagnet. Wo ist das magnetische Feld  $\mathbf{H}$  quellenfrei ( $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ )?

(Zutreffendes bitte ankreuzen!)

Quellenfreiheit	ja	nein
im Außenraum	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
auf den Seitenflächen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
im Inneren	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
auf den Stirnflächen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

MA10 (Zutreffendes ist anzukreuzen)

a) In welchem Fall verschwinden die Quellen der magnetischen Feldstärke  $\mathbf{H}$  ( $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ )?

immer	<input type="checkbox"/>
bei örtlich konstanter Magnetisierung	<input type="checkbox"/>

b) In welchem Fall verschwinden die Wirbel der magnetischen Induktion  $\mathbf{B}$  ( $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ )?

bei Feldanregung durch Permanentmagnete	<input type="checkbox"/>
bei Feldanregung durch gleichstromdurchflossene Spulen	<input type="checkbox"/>
in keinem der genannten Fälle	<input type="checkbox"/>

**MA11** Gegeben ist eine permeable Kugel (Permeabilität  $\mu$ ) im homogenen magnetischen Feld. Innerhalb der Kugel herrscht dann das ebenfalls homogene magnetische Feld  $\mathbf{H}_i$ .

- a) Gib die Magnetisierung  $\mathbf{M}$  der Kugel an.
- b) Wo und in welcher Form treten äquivalente Magnetisierungsströme auf?

Übungsaufgaben zum Thema

# Magnetostatik

MR01...12