Technische Universität Berlin Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik	**Prüfungen** in Theoretischer Elektrotechnik

Semester: SS 2004 Tag der Prüfung: 15.06.2004

2. Teilprüfung

im Fach

TET II

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

⇑ *bitte in Druckbuchstaben ausfüllen* ⇑

Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Rückseite!

Aufgabe	**A1** (2)	**A2** (3)	**A3** (3)	**A4** (2)	**A5** (2)	**A6** (3)
Punkte						
Aufgabe	**B1** (6)	**B2** (6)	**B3** (6)		Σ P	Note
Punkte						

HINWEISE

(bitte vor Beginn sorgfältig lesen!)

a) Prüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Es muß aus insgesamt 6 Blättern bestehen (1 Deckblatt, 2 Blätter mit den Aufgaben A1 bis A6, jeweils 1 Blatt für die Aufgaben B1 bis B3). **Falls Sie ein unvollständiges Klausurexemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte ein einwandfreies Exemplar aushändigen.**

b) Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Vornamen, Namen und die Matrikelnummer ein.

c) Sie haben 90 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Aufgaben. Es sind maximal 33 Punkte erreichbar.

d) Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben nur den unter den Fragen freigelassenen Raum (bei den Fragen B1 bis B3 auch die Rückseite). **Es werden beim Einsammeln keine Extrablätter angenommen!**

e) Achten Sie darauf, daß der Lösungsweg für den Korrektor nachvollziehbar ist.

f) Es sind **keinerlei Hilfsmittel** außer einem Schreibstift gestattet. Verwenden Sie aber bitte **keinen Bleistift**.

g) Die Teilnahme an dieser Klausur setzt eine **Anmeldung beim Prüfungsamt** voraus. Sollte diese nicht vorliegen, so kann die Klausur nicht benotet werden.

Bitte bestätigen Sie durch Ihre Unterschrift, daß Sie die Hinweise gelesen und verstanden haben.

Datum: ....

Unterschrift: ....

Aufgabe A1

Wie lautet das Glied $n = 0$ des rotationssymmetrischen Lösungsansatzes der LAPLACE-gleichung in Kugelkoordinaten und welche physikalische Anordnung läßt sich damit berechnen?

Das Glied $n = 0$ des Lösungsansatzes lautet

$$\phi = A_0 \frac{1}{r} \ .$$

Dieses beschreibt das Potential aller radialsymmetrischer, raumladungsfreier Anordnungen, wie z.B. zwischen den Elektroden eines Kugelkondensators.

Aufgabe A2

Wie lautet die *Diffusionsgleichung* für ein magnetisches Feld $\mathbf{H} = \mathbf{e}_y \, H_y(x,t)$? Separieren Sie diese Gleichung nach BERNOULLI in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen und definieren Sie dabei die Diffusionskonstante τ_D.

Die Diffusionsgleichung lautet

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} - \kappa\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0 \ .$$

Mit dem Produktansatz $H_y(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ wird daraus

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = -p^2 X \quad , \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau_D} T \ ,$$

wobei $\tau_D = \kappa\mu/p^2$ die Diffusionskonstante ist.

Aufgabe A3

Gegeben ist eine gleichstromdurchflossene Spule mit leitendem Kern. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Strom schlagartig abgeschaltet. Beschreibe qualitativ die Ausbildung der im Kern induzierten Wirbelstöme in Abhängigkeit von Ort und Zeit und erläutere, welche Rolle die LENZsche Regel bei diesem Vorgang spielt.

Beim Abschalten des Stromes fließen die induzierten Wirbelstöme im ersten Augenblick als Flächenstrom auf der Oberfläche des Kerns. Ihre Richtung ergibt sich aus der LENZschen Regel. Danach versuchen die Ströme das magnetische Feld zunächst aufrechtzuerhalten. Das gelingt ihnen mit fortschreitender Zeit immer schlechter, da ein Diffusionsprozess einsetzt, bei dem sich die Flächenströme über den Kern verteilen und dabei in ihrer Stärke nachlassen bis für $t \to \infty$ der gesamte Raum feldfrei ist.

Aufgabe A4

Erläutere, wie man mit Hilfe von Wirbelströmen eine Magnetschwebebahn realisieren kann. Welche Rolle spielt dabei die LENZsche Regel?

Die EDS–Technik (elektrodynamisches Schweben) macht sich die Kraft zwischen den gleichstromdurchflossenen Fahrzeugspulen und den Wirbelströmen im leitenden Fahrweg zunutze. Nach der LENZschen Regel muß die Kraft abstoßend sein. Da die Kräfte mit abnehmender Schwebehöhe zunehmen, wird sich so ein konstanter Abstand zwischen Fahrweg und Fahrzeug einstellen.

Aufgabe A5

Gib die Formel und die physikalische Bedeutung der Skineindringtiefe an.

Definition der Eindringtiefe:

$$\delta_S \quad = \quad \sqrt{\frac{2}{\omega\,\mu\,\kappa}}$$

Die Eindringtiefe ist die Konstante, mit der Felder im Leiter exponentiell abklingen.

Aufgabe A6

Gegeben sei der Phasor eines magnetischen Feldes in Abhängigkeit vom Ort x

$$\tilde{H}(x) = H_0\,\mathrm{e}^{-kx} \quad , \quad k^2 = \mathrm{j}\omega\kappa\mu_0$$

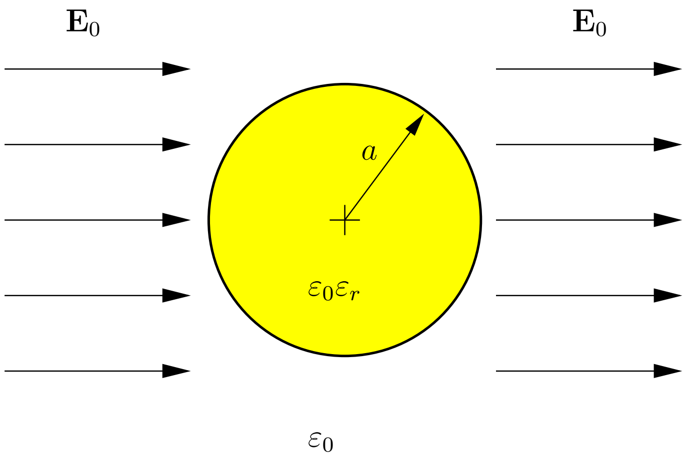
mit der reellen Amplitude H_0. Berechne daraus den zeitlichen Verlauf $H(x,t)$ der magnetischen Feldstärke.

$$H(x,t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{H}(x)\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega t}\right\} = H_0 \mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{\,-(1+\mathrm{j})x/\delta_S}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega t}\right\} = H_0\,\mathrm{e}^{\,-x/\delta_S}\,\cos(\omega t - x/\delta_S)$$

$$\delta_S = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\kappa}}$$

Aufgabe B1

Auf eine dielektrische Kugel vom Radius a und mit der relativen Dielektrizitätskonstanten ε_r wirke von außen ein homogenes elektrisches Feld $\mathbf{E}_0$ ein.



Bestimme das Potential innerhalb der Kugel.

Potential des homogenen Feldes

$$\phi_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos\vartheta = -E_0 r^1 P_1(\cos\vartheta)$$

$\rightarrow$ Das gesamte Potential enthält nur das Glied $n = 1$ der Lösungssumme.

Potentialansätze

$$\begin{aligned} \phi_1 &= A\,\frac{r}{a}\,\cos\vartheta && \text{für} \quad 0 \le r \le a \\ \phi_2 &= -E_0 r\cos\vartheta + B\frac{a^2}{r^2}\cos\vartheta && \text{für} \quad a \le r \end{aligned}$$

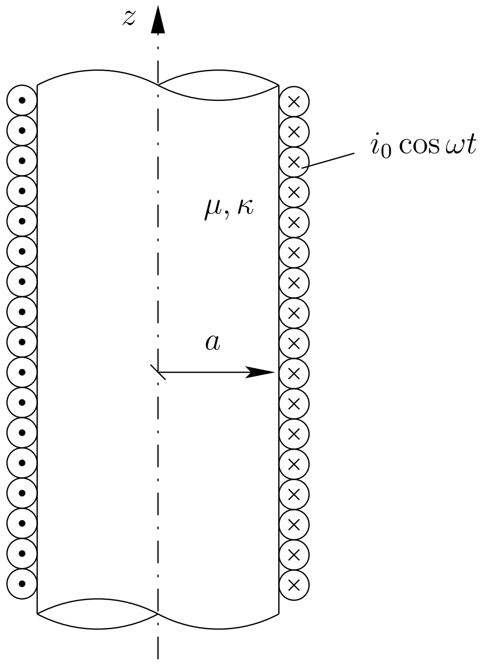
Stetigkeitsbedingungen für $r = a$

$$\begin{aligned} &\phi_1 = \phi_2 && \longrightarrow && A = -E_0 a + B && (i) \\ &\varepsilon_r\frac{\partial\phi_1}{\partial r} = \frac{\partial\phi_2}{\partial r} && \longrightarrow && \varepsilon_r A\,\frac{1}{a} = -E_0 - 2B\,\frac{1}{a} && (ii) \end{aligned}$$

$$-E_0 - \frac{2}{a}\,A - 2E_0 = A\,\frac{1}{a}\,\varepsilon_r \quad \rightarrow \quad A(\varepsilon_r + 2) = -3E_0 a \quad \rightarrow \quad \boxed{A = -\frac{3E_0 a}{\varepsilon_r + 2}}$$

Aufgabe B2

Ein sehr langer leitender Zylinder (Radius a, Länge $l \gg a$, Leitfähigkeit κ) ist außen mit einer dicht gepackten Spule mit N Windungen bewickelt, durch die ein Wechselstrom $i(t) = i_0 \cos \omega t$ fließt.



Berechne die Wirbelstromdichte im Zylinder unter Vernachlässigung der Randeffekte.

Außerhalb des Zylinders (für $\varrho \geq a$) verschwindet die magnetische Feldstärke. Innerhalb des Zylinders ist sie z -gerichtet und erfüllt als komplexer Phasor die Diffusionsgleichung:

$$\Delta H_z = \frac{\mathrm{d}^2 H_z}{\mathrm{d}\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}\varrho} = k^2 H_z \quad , \quad k^2 = \mathrm{j}\omega\mu\kappa \quad \text{für} \qquad \varrho \leq a$$

Lösungen dieser Differentialgleichung sind modifizierte Besselfunktionen:

$$H_z = A I_0(k\varrho) + B K_0(k\varrho)$$

Wegen $K_0(0) = \infty$ ist $B = 0$.

Randbedingung für $\varrho = a$:

$$\oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = I \quad \rightarrow \quad [H_z(\varrho = a) - 0]\, l = i_0 N \quad \rightarrow \quad A = \frac{i_0 N}{l}\frac{1}{I_0(ka)}$$

Nach Einsetzen der Konstanten erhält man:

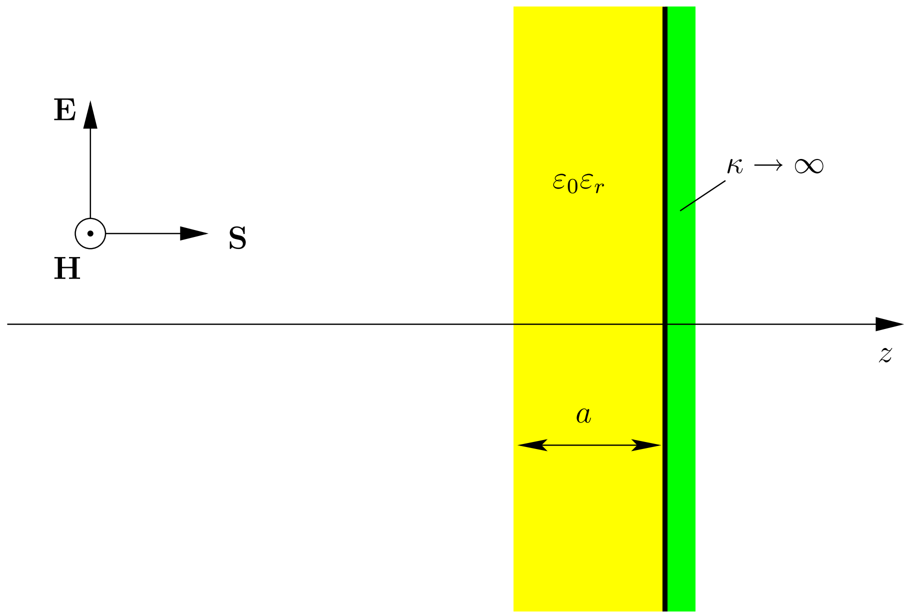
$$H_z = \frac{i_0 N}{l}\frac{I_0(k\varrho)}{I_0(ka)}$$

Wirbelströme:

$$\mathbf{J}_W = \nabla \times \mathbf{H} = \nabla H_z \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial H_z}{\partial \varrho} = -k\,\frac{i_0 N}{l}\frac{I_1(k\varrho)}{I_0(ka)}\,\mathbf{e}_\varphi \quad , \quad k = \frac{1+\mathrm{j}}{\delta_S} \ , \ \delta_S = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu_0}}$$

Aufgabe B3

Eine harmonische, ebene Welle trifft gemäß Abbildung auf eine dielektrische Schicht der Dicke a auf, welche auf der rechten Seite mit einer perfekt leitenden Folie belegt ist. Das Magnetfeld der einfallenden Welle habe die Amplitude H_0.



Zu bestimmen ist die Amplitude der reflektierten Welle vor dem Dielektrikum.

Felder vor dem Dielektrikum $z < -a$:

$$H_1 = H_0 \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 z} + R\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_1 z}\right) \quad , \quad E_1/Z_1 = H_0 \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 z} - R\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_1 z}\right)$$

Felder im Dielektrikum $-a \le z \le 0$:

$$H_2 = H_0 \left(A_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 z} + B_2\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_2 z}\right) \quad , \quad E_2/Z_2 = H_0 \left(A_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 z} - B_2\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_2 z}\right)$$

mit

$$k_1^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \quad , \quad k_2^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \quad , \quad Z_1 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \quad , \quad Z_2 = \sqrt{\mu_0/(\varepsilon_0\varepsilon_r)}\ .$$

Wegen $E_2(z=0) = 0$ ist $A_2 = B_2$.
Stetigkeitsbedingungen für $z = -a$:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 a} + R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 a} = 2A_2 \cos k_2 a \quad , \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 a} - R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 a} = 2\mathrm{j}A_2 \frac{Z_2}{Z_1} \sin k_2 a$$

$$\mathrm{j}\,Z_2 \tan k_2 a \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 a} + R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 a}\right) = Z_1 \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 a} - R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 a}\right) \quad \to \quad \boxed{R = \mathrm{e}^{2\mathrm{j}k_1 a} \frac{Z_1 - \mathrm{j}\,Z_2 \tan k_2 a}{Z_1 + \mathrm{j}\,Z_2 \tan k_2 a}}$$