Technische Universität Berlin Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik	**Prüfungen** in Theoretischer Elektrotechnik

Semester: SS 2004 Tag der Prüfung: 13.07.2004

Prüfung

im Fach

TET II

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

⇑ *bitte in Druckbuchstaben ausfüllen* ⇑

Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Rückseite!

Aufgabe	**A1** (2)	**A2** (2)	**A3** (2)	**A4** (3)	**A5** (2)	**A6** (2)	**A7** (3)
Punkte							
Aufgabe	**B1** (6)	**B2** (6)	**B3** (6)	**B4** (5)	**B5** (6)	Σ P	Note
Punkte							

HINWEISE

(bitte vor Beginn sorgfältig lesen!)

a) Prüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Es muß aus insgesamt 8 Blättern bestehen (1 Deckblatt, 2 Blätter mit den Aufgaben A1 bis A7, jeweils 1 Blatt für die Aufgaben B1 bis B5). **Falls Sie ein unvollständiges Klausurexemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte ein einwandfreies Exemplar aushändigen.**

b) Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Vornamen, Namen und die Matrikelnummer ein.

c) Sie haben 120 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Aufgaben. Es sind maximal 45 Punkte erreichbar.

d) Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben nur den unter den Fragen freigelassenen Raum (bei den Fragen B1 bis B5 evt. auch die Rückseite). **Es werden beim Einsammeln keine Extrablätter angenommen!**

e) Achten Sie darauf, daß der Lösungsweg für den Korrektor nachvollziehbar ist.

f) Es sind **keinerlei Hilfsmittel** außer einem Schreibstift gestattet. Verwenden Sie aber bitte **keinen Bleistift**.

g) Die Teilnahme an dieser Klausur setzt eine **Anmeldung beim Prüfungsamt** voraus. Sollte diese nicht vorliegen, so kann die Klausur nicht benotet werden.

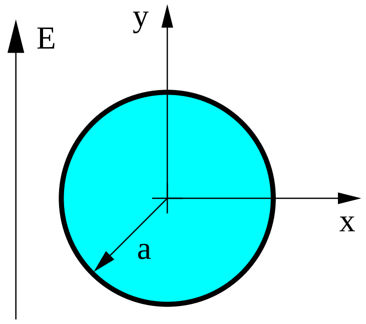
Bitte bestätigen Sie durch Ihre Unterschrift, daß Sie die Hinweise gelesen und verstanden haben.

Datum: ....

Unterschrift: ....

Aufgabe A1

In ein y-gerichtetes, homogenes elektrostatisches Feld wird ein leitender Zylinder mit dem Radius a eingebracht.



a) $\phi(\varrho, \varphi) = B\,\frac{1}{\varrho}\,\sin\varphi$

b) $\phi(\varrho, \varphi) = \left(A\,\varrho + B\,\frac{1}{\varrho}\right)\sin\varphi$

c) $\phi(\varrho, \varphi) = \left(A\,\varrho + B\,\frac{1}{\varrho}\right)\cos\varphi$

d) $\phi(\varrho, \varphi) = \left(A\,\varrho + B\,\frac{1}{\varrho^2}\right)\sin\varphi$

Welche der angegebenen Potentialansätze sind im Außenraum $\varrho > a$ richtig?

Nur der Ansatz **b)** ist richtig, weil das Potential eine ungerade Funktion von φ sein muß und beide Funktionen ϱ bzw. $1/\varrho$ erforderlich sind.

Aufgabe A2

In einem stromdurchflossenen Leiter mit der Leitfähigkeit κ sei die Stromdichte $\mathbf{J}$ bekannt.

a) Wie ermittelt man daraus die Verlustleistung P_V, wenn es sich um Gleichstrom handelt?

b) Wie berechnet man den zeitlichen Mittelwert $\overline{P}_V$ der Verlustleistung aus dem Phasor der Stromdichte, wenn der Leiter von einem Wechselstrom der Kreisfrequenz ω durchflossen wird?

a) Bei Gleichstrom ist die Verlustleistung

$$P_V = \frac{1}{\kappa}\int_V \mathbf{J}^2\,\mathrm{d}V\ .$$

b) Bei Wechselstrom erhält man den zeitlichen Mittelwert aus der Beziehung

$$\overline{P}_V = \frac{1}{2\kappa}\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{J}^*\,\mathrm{d}V\ ,$$

wobei $\mathbf{J}$ jetzt der Phasor der Stromdichte und $\mathbf{J}^*$ der konjugiert komplexe Wert des Phasors der Stromdichte sein soll.

Aufgabe A3

Beschreiben Sie, wie man mit sinnvollen Näherungen die Verluste berechnen kann, die in der Bewandung einer Parallelplattenleitung bei Annahme einer endlichen aber hohen Leitfähigkeit auftreten.

Die Verlustberechnung wird mit der sogenannten *Power–Loss Methode* durchgeführt. Dabei werden zunächst bei Annahme perfekter Leitfähigkeit der Bewandung die verlustfreien Felder der Parallelplattenleitung bestimmt. Aus diesen sind die induzierten Wandströme zu ermitteln. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Wandströme bei endlicher Leitfähigkeit κ mit konstanter Dichte senkrecht zur Wand bis zur Skin–Eindringtiefe δ_s verteilt sind und danach sprungartig auf Null absinken. Dann kann von einem Flächenstrom ausgegangen werden, welcher der Tangentialkomponente des Magnetfeldes auf der Wand entspricht. Ist der Strom bestimmt, so kennt man auch die Verlustleistungsdichte $p_v = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$.

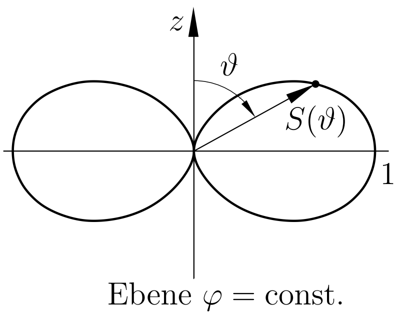
Aufgabe A4

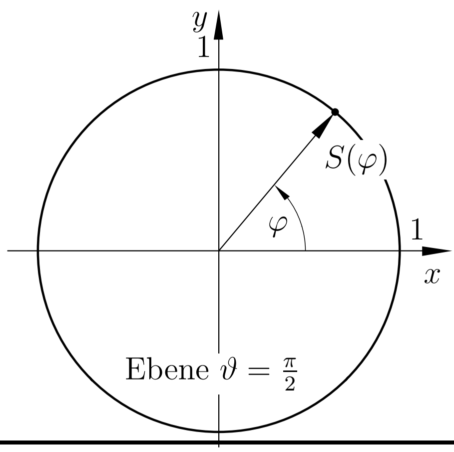
Wie lauten im *Fernfeld* die Phasoren der magnetischen und elektrischen Feldstärke eines HERTZschen Dipols (z-gerichtetes Stromelement $I_0 \cos\omega t$ der Länge Δs)?
Skizziere das vertikale (Ebene $\varphi = \text{const.}$) und horizontale (Ebene $\vartheta = \frac{\pi}{2}$) Strahlungsdiagramm des HERTZschen Dipols.

Im Fernfeld existieren nur die Komponenten H_φ und E_ϑ mit

$$H_\varphi \approx \mathrm{j}\,\frac{I_0 \Delta s}{4\pi}\,\frac{k}{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\,\sin\vartheta \quad , \quad E_\vartheta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,H_\varphi \quad , \quad k = \frac{\omega}{c}\ .$$

Strahlungsdiagramme:





Aufgabe A5

Welche der folgenden Funktionen beschreibt eine harmonische, in negative z-Richtung laufende Welle? (ω ist die Kreisfrequenz und k die Wellenzahl)

a) $\cos(\omega t - kz)$

b) $\mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega t + kz}\right\}$

c) $\mathrm{Im}\left\{\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}(\omega t + kz)}\right\}$

d) $\sin(\mathrm{j}[\omega t + kz])$

Nur bei **c)** handelt es sich um eine harmonische Welle, die sich in negative z-Richtung ausbreitet.

Aufgabe A6

Der Phasor der elektrischen Feldstärke in einem Rechteckhohlleiter der Kantenlänge a in x-Richtung und b in y-Richtung sei

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_y\, E_0 \,\sin\frac{\pi x}{a}\,\mathrm{e}^{\,-\mathrm{j}k_z z} \quad \text{mit} \quad k_z^2 = k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \quad , \quad k = \frac{\omega}{c}\ .$$

Um welchen Wellentyp handelt es sich und wie groß ist seine Grenzfrequenz für $a = 15$ cm und $b = 10$ cm?

Es handelt sich um die TE_{10}-Welle. Für die Grenzfrequenz gilt

$$\frac{\omega_c}{c} = \frac{\pi}{a} \quad \rightarrow \quad f_c = \frac{c}{2a} = \frac{3\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{0.3\,\mathrm{m}} = 1\,\mathrm{GHz}\ .$$

Aufgabe A7

Unter welchen Bedingungen emittiert ein geladenes Teilchen die sogenannte CERENKOV-Strahlung? Welchen Winkel bildet die Wellennormale der CERENKOV-Strahlung zur Bewegungsrichtung des Teilchens?

CERENKOV-Strahlung tritt auf, wenn sich ein Teilchen mit „Überlichtgeschwindigkeit“ in einem Medium mit der relativen Dielektrizitätskonstanten ε_r bewegt, d.h. wenn für die Geschwindigkeit des Teilchens v_0 die Ungleichung

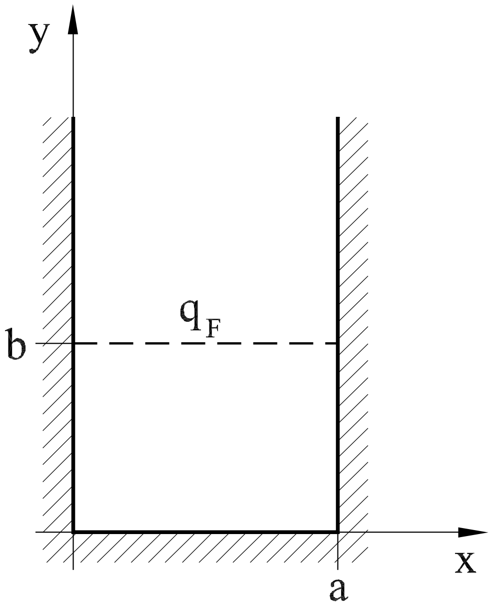
$$c/\sqrt{\varepsilon_r} < v_0 < c$$

erfüllt ist. Für den Winkel ϑ der Wellennormalen zur Bewegungsrichtung gilt dann

$$\cos\vartheta = \frac{c/\sqrt{\varepsilon_r}}{v_0} \; .$$

Aufgabe B1

In kartesischen Koordinaten seien die Ebenen $x = 0$, $x = a$ und $y = 0$ leitend und geerdet. In der Ebene $y = b$ befinde sich eine Flächenladung $q_F(x) = q_{F0} \sin(\pi x/a)$.



Zu bestimmen ist das elektrostatische Potential im Bereich $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y < \infty$.

Aufgrund der Flächenladung müssen getrennte Ansätze oberhalb (Raum 2) und unterhalb (Raum 1) der Flächenladung aufgestellt werden, die in diesem Fall nur das Glied $n = 1$ der Lösungssumme enthalten:

$$\phi_1 = A \sin \frac{\pi x}{a} \frac{\sinh \frac{\pi y}{a}}{\sinh \frac{\pi b}{a}} \quad , \quad \phi_2 = A \sin \frac{\pi x}{a} \, \mathrm{e}^{-\frac{\pi(y-b)}{a}} \; .$$

Die Ansätze erfüllen bereits die Randbedingung auf der leitenden Bewandung und das Potential ist stetig beim Durchgang durch die Fläche $y = b$. Die Konstante A erhält man aus dem unstetigen Verhalten der Normalkomponente der Flußdichte

$$D_{y2} - D_{y1} = q_{F0} \quad \rightarrow \quad \left.\frac{\partial \phi_1}{\partial y}\right|_{y=b} - \left.\frac{\partial \phi_2}{\partial y}\right|_{y=b} = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0} \; .$$

Nach Einsetzen folgt

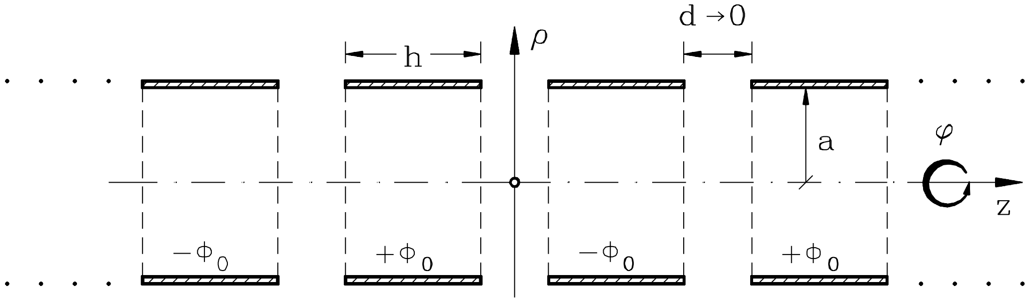
$$A \, \frac{\pi}{a} \left(\coth \frac{\pi b}{a} + 1 \right) = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0}$$

und damit

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{q_{F0} a}{\pi \varepsilon_0} \sin \frac{\pi x}{a} \frac{\sinh \frac{\pi y}{a}}{\sinh \frac{\pi b}{a} + \cosh \frac{\pi b}{a}} \\ \phi_2 &= \frac{q_{F0} a}{\pi \varepsilon_0} \sin \frac{\pi x}{a} \frac{\sinh \frac{\pi b}{a}}{\sinh \frac{\pi y}{a} + \cosh \frac{\pi b}{a}} \, \mathrm{e}^{-\frac{\pi(y-b)}{a}} \; . \end{aligned}$$

Aufgabe B2

Gegeben ist eine periodische Anordnung leitender Ringe, an die alternierend die Potentiale $\pm\phi_0$ angelegt sind. Der Radius aller Ringe sei a, ihre Breite h und der gegenseitige Abstand d sei sehr viel kleiner als alle übrigen Abmessungen.



Bestimme das Potential im Raum $\varrho < a$ unter der Annahme, daß der Abstand d zwischen den Ringen vernachlässigbar klein ist, d.h. $d \to 0$!

Allgemeiner Lösungsansatz in Zylinderkoordinaten:

$$\boxed{\begin{aligned} \phi(\varrho, z) \quad &= \quad (A_0 + B_0 \ln \varrho) \cdot (C_0 + D_0 z) + \\ &+ \sum_{k_z \neq 0} [A\, I_0(k_z\varrho) + B\, K_0(k_z\varrho)] \cdot [C\, \cos k_z z + D\, \sin k_z z] \end{aligned}} \tag{1}$$

Reduzierter Ansatz:

Das Potential muß auf der Achse endlich bleiben und in den Ebenen $z = 0$ sowie $z = h$ verschwinden. Außerdem ist es symmetrisch zur Ebene $z = \frac{h}{2}$.

$$\phi(\varrho, z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n I_0 \left(\frac{n\pi\varrho}{h} \right) \sin \frac{n\pi z}{h} \tag{2}$$

Fourieranalyse:

$$\phi(\varrho = a, z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n I_0 \left(\frac{n\pi a}{h} \right) \sin \frac{n\pi z}{h} = -\phi_0 \quad \text{für} \tag{3}$$

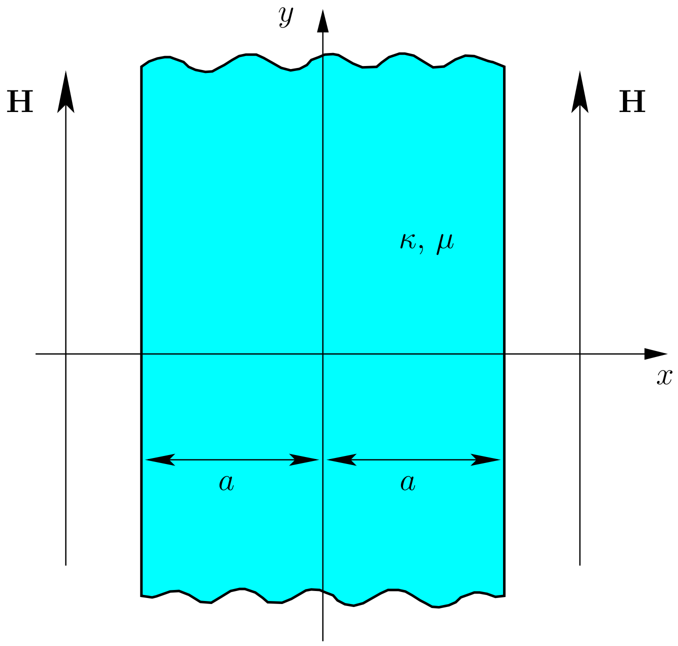
$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n I_0 \left(\frac{n\pi a}{h} \right) \underbrace{\int_0^h \sin \frac{n\pi z}{h} \sin \frac{m\pi z}{h}\, \mathrm{d}z}_{\frac{h}{2}\delta_m^n} == -\phi_0 \underbrace{\int_0^h \sin \frac{m\pi z}{h}\, \mathrm{d}z}_{-\frac{h}{m\pi}(\cos m\pi - 1)}$$

Resultierendes Potential:

$$\boxed{\frac{\phi(\varrho, z)}{\phi_0} = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{I_0\left(\frac{n\pi\varrho}{h}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right)} \sin \frac{n\pi z}{h}} \tag{4}$$

Aufgabe B3

Der Raum $|x| \leq a$ sei mit Materie der Leitfähigkeit $\kappa \neq 0$ und der Permeabilität μ ausgefüllt. Von außen wirke ein homogenes magnetisches Wechselfeld $\mathbf{H} = \mathbf{e}_y \, H_0 \, \cos \omega t$ ein. Bestimme die induzierte Stromdichte im Bereich $|x| \leq a$.



Gerechnet wird mit dem Phasor der magnetischen Feldstärke

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_y \, H_y(x) \; ,$$

die im leitenden Bereich die HELMHOLTZgleichung

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mathrm{j}\omega\kappa\mu \, \mathbf{H} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 H_y}{\mathrm{d}x^2} = \mathrm{j}\omega\kappa\mu \, H_y$$

erfüllen muß. Die allgemeine Lösung lautet:

$$H_y(x) = A \sinh([1+\mathrm{j}]x/\delta_S) + B \cosh([1+\mathrm{j}]x/\delta_S) \quad , \quad \delta_S = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu}} \; .$$

Aufgrund der Symmetrie ist $A = 0$. Außerdem gilt $H_y(x = a) = H_0$, so daß man das Magnetfeld in der Form

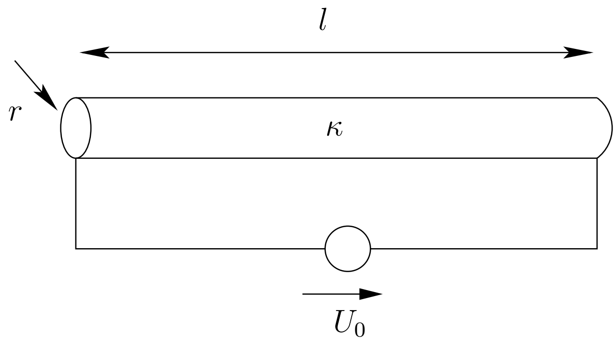
$$H_y(x) = H_0 \, \frac{\cosh([1+\mathrm{j}]x/\delta_S)}{\cosh([1+\mathrm{j}]a/\delta_S)}$$

erhält. Die Stromdichte ist dann nach MAXWELL

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \rightarrow \quad J_z = \frac{\mathrm{d}H_y}{\mathrm{d}x} \quad \rightarrow \quad \boxed{J_z(x) = H_0 \, \frac{1+\mathrm{j}}{\delta_S} \, \frac{\sinh([1+\mathrm{j}]x/\delta_S)}{\cosh([1+\mathrm{j}]a/\delta_S)}} \; .$$

Aufgabe B4

Ein kreisrunder Draht habe den Radius r, die Länge $l \gg r$ und die Leitfähigkeit κ. An seinen Enden wird eine Gleichspannungsquelle U_0 angeschlossen.



Ausgehend vom POYNTINGschen Energiesatz berechne man mit Hilfe des POYNTINGschen Vektors die im Leiter entstehende Verlustleistung.

Es muß zunächst das elektromagnetische Feld bestimmt werden. Das elektrische Feld im Leiter weist nur eine ortsunabhängige z-Komponente auf, während das magnetische Feld φ-gerichtet ist und nach OERSTED mit Hilfe des eingeschlossenen Stromes bestimmt werden kann.

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_z \frac{U_0}{l} \quad , \quad \oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \frac{U_0 \kappa \pi r^2}{l} \frac{\varrho^2}{r^2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi \frac{U_0 \kappa}{2l} \varrho$$

POYNTINGscher Vektor:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\mathbf{e}_\varrho \frac{U_0^2 \kappa}{2l^2} \varrho$$

Nach dem Energieerhaltungssatz läßt sich die Verlustleistung wie folgt bestimmen:

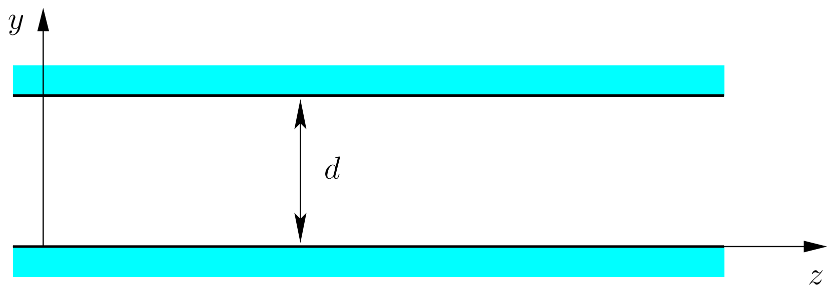
$$\underbrace{-\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_V (w_e + w_m)\, \mathrm{d}V}_{=0} = \oint \mathbf{S} \cdot \mathrm{d}\mathbf{O} + \int\limits_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}\, \mathrm{d}V \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{Verlustleistung} = P_V = -\oint \mathbf{S} \cdot \mathrm{d}\mathbf{O}}$$

Offensichtlich liefert nur die Mantelfläche mit dem gerichteten Flächenelement $\mathrm{d}\mathbf{O} = \mathbf{e}_\varrho r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z$ einen Beitrag:

$$P_V = \frac{U_0^2 \kappa \pi r^2}{l} = \frac{U_0^2}{R}$$

Aufgabe B5

Gegeben ist eine ideale Parallelplattenleitung mit dem Plattenabstand d.



a) Leite aus der HELMHOLTZgleichung das elektrische und magnetische Feld einer *senkrecht polarisierten* Welle her.

b) Bestimme die Resonanzfrequenzen *senkrecht polarisierter* Felder, wenn in den Ebenen $z = 0$ und $z = l$ der Parallelplattenleitung zusätzlich ideal leitende Platten eingeführt werden, so daß ein Resonator entsteht.

a) Bei senkrecht polarisierten Wellen existiert nur eine x-Komponente des elektrischen Feldes $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x\, E_x(y, z)$. Diese muß die HELMHOLTZgleichung erfüllen:

$$\nabla^2 E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -k^2 E_x$$

Lösungsansatz:

$$E_x = E_0 \sin k_y y\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{j} k_z z} \quad , \quad k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \quad , \quad k_y = \frac{n\pi}{d} \quad , \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Der Ansatz garantiert, daß die elektrische Feldstärke auf den Wänden $y = 0, d$ verschwindet. Die magnetische Feldstärke folgt aus dem Induktionsgesetz

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \mathbf{H} \quad \rightarrow \quad H_y = \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad , \quad H_z = -\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$H_y = \mp E_0 \frac{k_z}{\omega\mu_0} \sin k_y y\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{j} k_z z} \quad , \quad H_z = -\mathrm{j} E_0 \frac{k_y}{\omega\mu_0} \cos k_y y\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{j} k_z z}$$

b) Auf den leitenden Platten in den Ebenen $z = 0, l$ muß die elektrische Feldstärke ebenfalls verschwinden. Damit setzt sich das elektrische Feld aus einer vor- und einer rücklaufenden Welle in der Form

$$E_x = E_0 \sin k_y y \left(\mathrm{e}^{+\mathrm{j} k_z z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j} k_z z} \right) = 2\mathrm{j} E_0 \sin k_y y\, \sin k_z z \quad , \quad k_z = \frac{m\pi}{l} \quad , \quad m = 1, 2, 3 \ldots$$

zusammen. Die Resonanzfrequenzen sind dann

$$\omega_{nm}^2 \varepsilon_0 \mu_0 = k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \quad \rightarrow \quad f_{nm} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{d}\right)^2 + \left(\frac{m}{l}\right)^2} \, .$$