Technische Universität Berlin Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik	**Prüfungen** in Theoretischer Elektrotechnik

Semester: SS 2005 Tag der Prüfung: 17.05.2005

1. Teilprüfung

im Fach

TET II

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

⇑ *bitte in Druckbuchstaben ausfüllen* ⇑

Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Rückseite!

Aufgabe	**A1** (2)	**A2** (2)	**A3** (3)	**A4** (3)	**A5** (2)	**A6** (3)
Punkte						
Aufgabe	**B1** (6)	**B2** (6)	**B3** (6)		Σ P	Note
Punkte						

HINWEISE

(bitte vor Beginn sorgfältig lesen!)

a) Prüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Es muß aus insgesamt 6 Blättern bestehen (1 Deckblatt, 2 Blätter mit den Aufgaben A1 bis A6, jeweils 1 Blatt für die Aufgaben B1 bis B3). **Falls Sie ein unvollständiges Klausurexemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte ein einwandfreies Exemplar aushändigen.**

b) Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Vornamen, Namen und die Matrikelnummer ein.

c) Sie haben 90 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Aufgaben. Es sind maximal 33 Punkte erreichbar.

d) Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben nur den unter den Fragen freigelassenen Raum (bei den Fragen B1 bis B3 auch die Rückseite). **Es werden beim Einsammeln keine Extrablätter angenommen!**

e) Achten Sie darauf, daß der Lösungsweg für den Korrektor nachvollziehbar ist.

f) Es sind **keinerlei Hilfsmittel** außer einem Schreibstift gestattet. Verwenden Sie aber bitte **keinen Bleistift**.

g) Die Teilnahme an dieser Klausur setzt eine vorherige **Anmeldung** voraus. Sollte diese nicht vorliegen, so kann die Klausur nicht benotet werden.

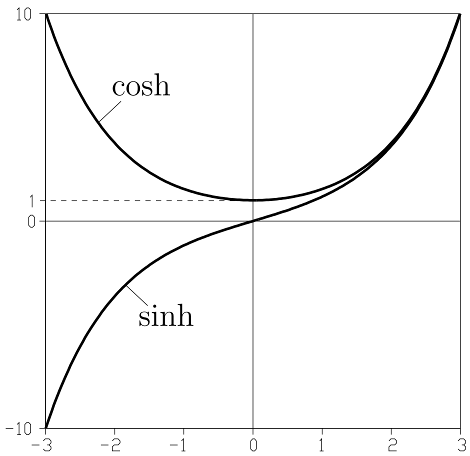
Bitte bestätigen Sie durch Ihre Unterschrift, daß Sie die Hinweise gelesen und verstanden haben.

Datum: ....

Unterschrift: ....

Aufgabe A1

Skizziere die Hyperbelfunktionen $\cosh x$ und $\sinh x$ und gib deren Zusammenhang mit den Exponentialfunktionen an!



$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$$

$$\cosh x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

Aufgabe A2

Wie lautet die mathematische Bedingung, welche die Funktionen $f_n(u)$, mit $n = 1, 2, 3, \ldots$, erfüllen müssen, damit sie im Bereich $-1 \leq u \leq 3$ bezüglich einer Gewichtsfunktion $w(u)$ *orthogonal* sind?

Die gesuchte Bedingung ist die sogenannte *Orthogonalitätsrelation*

$$\int_{-1}^{3} f_n(u)\, f_m(u)\, w(u)\; \mathrm{d}u = 0 \quad \text{für} \quad n \neq m\,.$$

Aufgabe A3

Separiere die LAPLACEgleichung in kartesischen Koordinaten mit Hilfe des Produktansatzes von BERNOULLI für eine skalare Ortsfunktion $\phi(y,z)$. Diese soll unabhängig von der Koordinate x sein und in positive z–Richtung abklingen, d.h. $\phi(y, z \to \infty) = 0$.

$$\phi(y,z) = Y(y) \cdot Z(z)$$

$$\nabla^2 \phi(y,z) = \nabla^2 \left[Y(y) \cdot Z(z) \right] = Z(z)\, \frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} + Y(y)\, \frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{Y}\, \frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2}}_{= -p^2} + \underbrace{\frac{1}{Z}\, \frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}}_{= +p^2} = 0$$

$$\frac{1}{Y}\, \frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}y^2} = -p^2 \qquad \rightarrow \qquad Y(y) = A\, \sin py + B\, \cos py$$

$$\frac{1}{Z}\, \frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = +p^2 \qquad \rightarrow \qquad Z(z) = \mathrm{e}^{-pz}$$

$$\boxed{\phi(y,z) = \sum_{p \neq 0} (A\, \sin py + B\, \cos py) \cdot \mathrm{e}^{-pz}}$$

Aufgabe A4

a) Was versteht man unter einem *Randwertproblem erster* bzw. *zweiter Art*?

b) Was sind *homogene* Randbedingungen?

c) Warum darf man auf einer Hüllfläche, die eine Ladung Q vollständig umschließt, keine homogenen Randbedingungen zweiter Art vorgeben?

a) Bei einem Randwertproblem erster Art ist auf der Oberfläche des Rechenvolumens die gesuchte Funktion vorgegeben und bei einem Randwertproblem zweiter Art die Normalableitung der gesuchten Funktion.

b) Verschwindet eine Funktion oder deren Ableitung an ihren Rändern, so liegen homogene Randbedingungen vor.

c) Da auf der Hüllfläche nach dem GAUSSschen Gesetz $Q = -\varepsilon_0 \oint \partial\phi/\partial n \; \mathrm{d}O$ gelten muß, kann dort die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke nicht vollständig verschwinden, d.h. homogene Randbedingungen zweiter Art sind physikalisch unmöglich.

Aufgabe A5

Warum kann man im allgemeinen Lösungsansatz der zweidimensionalen LAPLACEgleichung $\nabla^2\phi(x,y) = 0$ in *kartesischen Koordinaten* die Variablen x und y vertauschen, während eine Vertauschung der Variablen ϱ und φ im allgemeinen Lösungsansatz der LAPLACEgleichung in *Polarkoordinaten* $\nabla^2\phi(\varrho,\varphi) = 0$ nicht erlaubt ist?

In kartesischen Koordinaten lautet die LAPLACEgleichung

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

und eine Vertauschung von x und y ändert nichts, so daß sich auch in der allgemeinen Lösung die Variablen vertauschen lassen. In Polarkoordinaten ist ϱ eine geradlinige und φ eine krummlinige Koordinate. Dies bringt durch den metrischen Faktor eine Unsymmetrie in die LAPLACEgleichung, so daß sich diese bei Vertauschung der Variablen ändert.

Aufgabe A6

Welche Bedingungen sind für das *elektrostatische Potential* an der Trennfläche zwischen zwei Medien mit den unterschiedlichen Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2 zu erfüllen, wenn auf der Trennfläche zusätzlich eine Flächenladung q_F vorhanden ist? Die Flächennormale der Trennfläche sei $\mathbf{e}_y$.

An der Trennfläche zwischen den Medien ist das Potential stetig und die Normalkomponente der Flußdichte springt um den Wert der Flächenladung:

$$\phi_1 = \phi_2$$

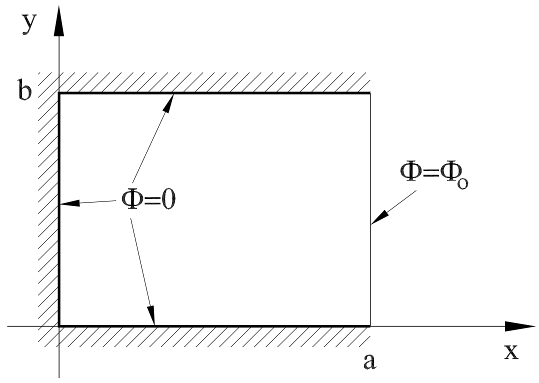
$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = q_F \quad \rightarrow \quad \varepsilon_1\frac{\partial\phi_1}{\partial y} - \varepsilon_2\frac{\partial\phi_2}{\partial y} = q_F$$

Aufgabe B1

Im kartesischen Koordinatensystem (x, y) sind die Ebenen $x = 0$, $y = 0$ und $y = b$ als leitende geerdete Beläge ausgeführt, während in der Ebene $x = a$ das Potential den konstanten Wert

$$\phi(x = a, y) = \phi_0$$

aufweist.



Zu bestimmen ist das elektrostatische Potential im Innenraum des Rechteckzylinders.

allgemeiner Potentialansatz in kartesischen Koordinaten:

$$\phi(x, y) = (A_0 + B_0 x) \cdot (C_0 + D_0 y)$$
$$+ \sum_{k_x \neq 0} [A(k_x) \cosh k_x x + B(k_x) \sinh k_x x] \cdot [C(k_x) \cos k_x y + D(k_x) \sin k_x y]$$

homogene Randbedingungen:

$$\phi(x, 0) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{C_0 = C(k_x) = 0}$$

$$\phi(x, b) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{D_0 = 0} \quad , \quad \sin k_x b = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{k_x = \frac{n\pi}{b}} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\phi(0, y) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{A(k_x) = 0}$$

Berücksichtigung der Potentialvorgabe:

$$\phi(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} = \phi_0$$

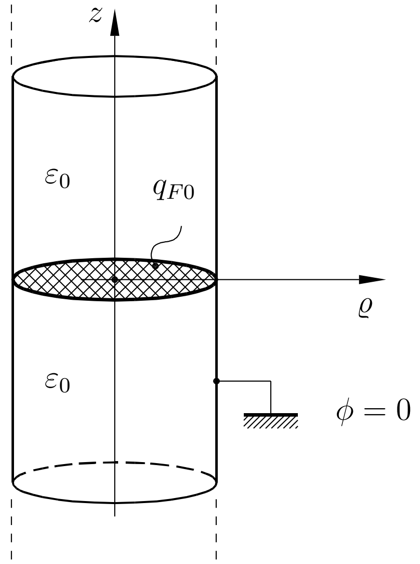
Fourierentwicklung:

$$\underbrace{\phi_0 \int_0^b \sin \frac{m\pi y}{b} \, \mathrm{d}y}_{\frac{2b}{m\pi} \text{ für } m = 1, 3, 5 \ldots} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \underbrace{\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} \, \mathrm{d}y}_{\frac{b}{2} \delta_m^n}$$

$$\boxed{\frac{\phi(x, y)}{\phi_0} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sinh \frac{n\pi x}{b}}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b}}$$

Aufgabe B2

Gegeben ist ein unendlich langes geerdetes Metallrohr vom Radius a. In der Ebene $z = 0$ befinde sich eine konstante Flächenladung q_{F0}.



Bestimme das Potential innerhalb des Rohres!

Hinweise:

$$\int_0^a \mathrm{J}_0\left(j_{0n}\frac{\varrho}{a}\right)\,\mathrm{J}_0\left(j_{0m}\frac{\varrho}{a}\right)\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho = \frac{a^2}{2}\,\mathrm{J}_1^2(j_{0n})\,\delta_n^m \quad , \quad \int_0^a \mathrm{J}_0\left(j_{0n}\frac{\varrho}{a}\right)\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho = \frac{a^2}{j_{0n}^2}\,\mathrm{J}_1(j_{0n})$$

$$z \le 0: \quad \phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\mathrm{J}_0\left(j_{0n}\frac{\varrho}{a}\right)\,\mathrm{e}^{j_{0n}z/a} \quad , \quad z \ge 0: \quad \phi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\mathrm{J}_0\left(j_{0n}\frac{\varrho}{a}\right)\,\mathrm{e}^{-j_{0n}z/a}$$

Die Ansätze garantieren bereits einen stetigen Potentialübergang am Ort der Flächenladung!

Stetigkeitsbedingung am Ort $z = 0$:

$$D_{z2} - D_{z1} = q_{F0} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\phi_1}{\partial z} - \frac{\partial\phi_2}{\partial z} = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\frac{j_{0n}}{a}\,2\int_0^a \mathrm{J}_0\left(j_{0n}\frac{\varrho}{a}\right)\,\mathrm{J}_0\left(j_{0m}\frac{\varrho}{a}\right)\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0}\int_0^a \mathrm{J}_0\left(j_{0n}\frac{\varrho}{a}\right)\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho$$

Mit den in der Aufgabenstellung angegebenen Integralen folgt daraus

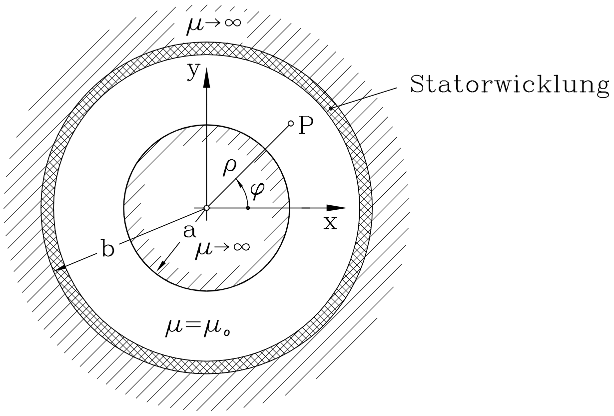
$$\boxed{A_n = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0}\,\frac{a}{j_{0n}^3}\,\frac{1}{\mathrm{J}_1(j_{0n})}}\ .$$

Aufgabe B3

In den Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) sind die Bereiche $\varrho \le a$ und $b \le \varrho$ mit hochpermeabler Materie $\mu \to \infty$ gefüllt und stellen Läufer und Stator einer elektrischen Maschine dar. Als Ersatz für die Statorwicklung soll auf der Zylinderfläche $\varrho = b$ der Flächenstrom

$$\mathbf{J}_F = J_{F0} \sin\varphi \, \mathbf{e}_z \quad .$$

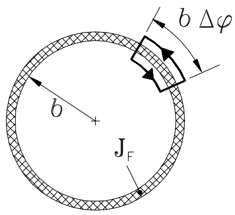
angenommen werden. Bestimme das magnetische Vektorpotential $\mathbf{A}$ im Bereich $a \le \varrho \le b$.



Da ein ebenes Problem mit allein z–gerichteten Strömen vorliegt, weist das Vektorpotential auch nur eine z–Komponente auf. Die Komponenten des magnetischen Feldes ergeben sich mit $\mathbf{A} = A(\varrho, \varphi)\, \mathbf{e}_z$ zu

$$\mu_0 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \to \quad \mu_0 H_\varrho = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \quad , \quad \mu_0 H_\varphi = -\frac{\partial A}{\partial \varrho} \quad .$$

Erfassung des erregenden Strombelages:



$$\oint \mathbf{H} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{s} = (0 - H_\varphi|_{\varrho=b}) b \Delta\varphi = J_{F0} b \Delta\varphi \sin\varphi$$

$$\to \quad \left. \frac{\partial A}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=b} = \mu_0 J_{F0} \sin\varphi$$

Reduzierter Potentialansatz im Luftspalt:

$$A(\varrho, \varphi) = \left(C\frac{\varrho}{a} + D\frac{a}{\varrho} \right) \sin\varphi \quad , \quad \frac{\partial A}{\partial \varrho} = \left(C\frac{1}{a} - D\frac{a}{\varrho^2} \right) \sin\varphi$$

Auf dem Zylinder $\varrho = a$ muß die Tangentialkomponente des Feldes verschwinden

$$H_\varphi|_{\varrho=a} = 0 \quad \to \quad C = D$$

und aufgrund der Randbedingung auf dem Zylinder $\varrho = b$ folgt

$$D \left\{ \frac{1}{a} - \frac{a}{b^2} \right\} = \mu_0 J_{F0} \quad \to \quad D = \frac{\mu_0 J_{F0} b}{b/a - a/b} \quad \to \quad \boxed{A(\varrho, \varphi) = \mu_0 J_{F0} b \, \frac{\varrho/a + a/\varrho}{b/a - a/b} \sin\varphi} \quad .$$