Technische Universität Berlin Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik	**Prüfungen** in Theoretischer Elektrotechnik

Semester: SS 2005 Tag der Prüfung: 14.06.2005

2. Teilprüfung

im Fach

TET II

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

⇑ *bitte in Druckbuchstaben ausfüllen* ⇑

Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Rückseite!

Aufgabe	**A1** (2)	**A2** (3)	**A3** (2)	**A4** (2)	**A5** (3)	**A6** (3)
Punkte						
Aufgabe	**B1** (6)	**B2** (6)	**B3** (6)		Σ P	Note
Punkte						

HINWEISE

(bitte vor Beginn sorgfältig lesen!)

a) Prüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Es muß aus insgesamt 6 Blättern bestehen (1 Deckblatt, 2 Blätter mit den Aufgaben A1 bis A6, jeweils 1 Blatt für die Aufgaben B1 bis B3). **Falls Sie ein unvollständiges Klausurexemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte ein einwandfreies Exemplar aushändigen.**

b) Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Vornamen, Namen und die Matrikelnummer ein.

c) Sie haben 90 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Aufgaben. Es sind maximal 33 Punkte erreichbar.

d) Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben nur den unter den Fragen freigelassenen Raum (bei den Fragen B1 bis B3 auch die Rückseite). **Es werden beim Einsammeln keine Extrablätter angenommen!**

e) Achten Sie darauf, daß der Lösungsweg für den Korrektor nachvollziehbar ist.

f) Es sind **keinerlei Hilfsmittel** außer einem Schreibstift gestattet. Verwenden Sie aber bitte **keinen Bleistift**.

g) Die Teilnahme an dieser Klausur setzt eine vorherige **Anmeldung** voraus. Sollte diese nicht vorliegen, so kann die Klausur nicht benotet werden.

Bitte bestätigen Sie durch Ihre Unterschrift, daß Sie die Hinweise gelesen und verstanden haben.

Datum: ....

Unterschrift: ....

Aufgabe A1

Gegeben ist ein unmagnetisches Material mit der Leitfähigkeit

$$\kappa = \frac{5 \cdot 10^8}{\pi^2} \, \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vm}} \, .$$

Berechne die Skineindringtiefe δ_S bei einer Frequenz $f = 50\,\mathrm{Hz}$.

Hinweis: es ist kein Taschenrechner erforderlich.

$$\delta_S = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu_0}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi 50\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,5 \cdot 10^8 \pi^{-2}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vm}}\,4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}}} = \sqrt{\frac{2}{2 \cdot 10^4\,\mathrm{m}^2}} = 1\,\mathrm{cm}$$

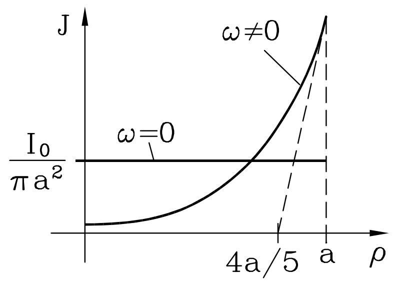
Aufgabe A2

Skizziere den Betrag der Stromdichte $\mathbf{J}(\varrho)$, die sich in einem kreiszylindrischen Leiter vom Radius a einstellt, wenn dieser

a) vom Gleichstrom I_0

b) vom Wechselstrom $I_0 \cos\omega t$ (die Skineindringtiefe sei $\delta_S = a/5$)

durchflossen wird.



Aufgabe A3

In einem stromdurchflossenen Leiter mit der Leitfähigkeit κ sei die Stromdichte $\mathbf{J}$ bekannt.

a) Wie ermittelt man daraus die Verlustleistung P_V, wenn es sich um Gleichstrom handelt?

b) Wie berechnet man den zeitlichen Mittelwert $\overline{P}_V$ der Verlustleistung aus dem Phasor der Stromdichte, wenn der Leiter von einem Wechselstrom der Kreisfrequenz ω durchflossen wird?

---

a) Bei Gleichstrom ist die Verlustleistung

$$P_V = \frac{1}{\kappa} \int_V \mathbf{J}^2 \, \mathrm{d}V \; .$$

b) Bei Wechselstrom erhält man den zeitlichen Mittelwert aus der Beziehung

$$\overline{P}_V = \frac{1}{2\kappa} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^* \, \mathrm{d}V \; ,$$

wobei $\mathbf{J}$ jetzt der Phasor der Stromdichte und $\mathbf{J}^*$ der konjugiert komplexe Wert des Phasors der Stromdichte sein soll.

Aufgabe A4

Welche der folgenden skalaren Ortsfunktionen in Kugelkoordinaten sind Lösung der Laplacegleichung? (Bitte ankreuzen!)

$\phi_1(r,\vartheta) = \frac{1}{r^2} \cos\vartheta$	
$\phi_2(r,\vartheta) = \frac{1}{r} \sin\vartheta$	
$\phi_3(r,\vartheta) = \frac{1}{r}$	
$\phi_4(r,\vartheta) = r$	

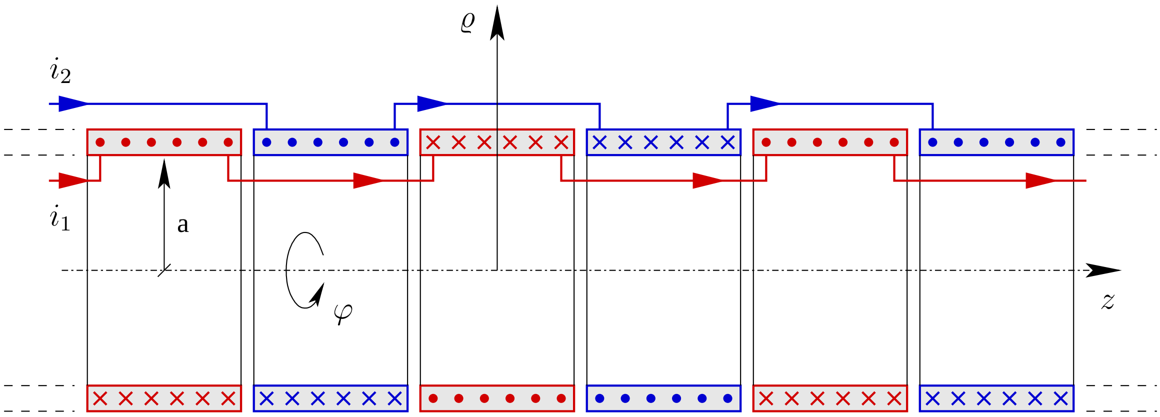
Gib, wo dies möglich ist, elektrostatische Anordnungen an, die durch solche Funktionen beschrieben werden.

$\phi_1(r,\vartheta)$ ist der Potentialverlauf eines elektrostatischen Dipols und $\phi_3(r,\vartheta)$ ist das normierte Potential einer Punktladung.

Aufgabe A5

Wie läßt sich mit Hilfe von wechselstromdurchflossenen Spulen ein rotationsymmetrisches magnetisches Wanderfeld erzeugen?

Auf der Oberfläche eines kreiszylindrischen Spulenkörpers mit dem Radius a werden zwei örtlich versetzte, periodische Wicklungen angebracht. Die einzelnen Spulen werden von zeitlich um 90^o verschobenen Wechselströmen $i_1(t) = I_0 \cos \omega t$ und $i_2(t) = I_0 \sin \omega t$ durchflossen.



Aufgabe A6

a) Wie lautet die Diffusionsgleichung für ein magnetisches Feld $\mathbf{H} = \mathbf{e}_y\, H_y(x,t)$, das nur eine y-Komponente aufweist und von der Koordinate x und der Zeit t abhängt?

b) Das magnetische Feld sei jetzt zeitharmonisch, $H_y(x,t) = f(x)\, \sin \omega t$. Wie lautet dann der *Phasor* des Feldes?

c) Wie nennt man die Differentialgleichung, die der Phasor des magnetischen Feldes erfüllt?

a) $\dfrac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = \mu\kappa\, \dfrac{\partial H_y}{\partial t}$

b) Wegen $\sin \omega t = \cos(\omega t - \pi/2)$ ist der Phasor $\tilde{H}_y(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2} f(x) = -\mathrm{j}\, f(x)$.

c) Der Phasor erfüllt die HELMHOLTZgleichung $\dfrac{\mathrm{d}^2 \tilde{H}_y}{\mathrm{d}x^2} = \mathrm{j}\omega\mu\kappa\, \tilde{H}_y$.

Aufgabe B1

In ein ursprünglich homogenes elektrostatisches Feld der Stärke

$$\mathbf{E} = E_0\,\mathbf{e}_z$$

wird eine leitende, geerdete Kugel mit dem Radius a eingebracht.

Bestimme das Potential der Anordnung und gib den Verlauf der influenzierten Flächenladungsdichte $q_F(\vartheta)$ auf der Kugeloberfläche an!

Allgemeiner Lösungsansatz in Kugelkoordinaten:

$$\phi(r,\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{-n-1}\right)\; P_n(\cos\vartheta)$$

Primäres Potential des homogenen Feldes:

$$\phi_p = -E_0 z = -E_0\, r\, \cos\vartheta = -E_0\, r^1\, P_1(\cos\vartheta) \quad \rightarrow \quad n = 1$$

Sekundäres Potential infolge der leitenden Kugel: $\qquad \phi_s = D\,\dfrac{a^2}{r^2}\,\cos\vartheta$

Randbedingung auf der Fläche $r = a$:

$$\left.\frac{\partial(\phi_p + \phi_s)}{\partial\vartheta}\right|_{r=a} \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad D - E_0 a = 0 \quad , \quad D = E_0 a$$

Feldstärke auf der Oberfläche:

$$\mathbf{E}(r=a,\vartheta) = -\left.\frac{\partial(\phi_p + \phi_s)}{\partial r}\right|_{r=a} \mathbf{e}_r = E_0 \left(2\frac{a^3}{r^3} + 1\right)_{r=a} \cos\vartheta\,\mathbf{e}_r = 3E_0\,\cos\vartheta\,\mathbf{e}_r$$

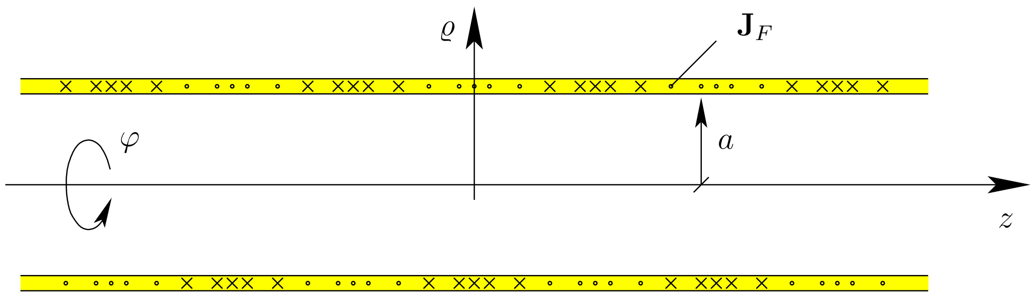
Die gesuchte influenzierte Flächenladungsdichte ist also

$$\boxed{q_{F,infl} = \varepsilon_0\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}(r=a,\vartheta) = 3\varepsilon_0\,E_0\,\cos\vartheta} \quad .$$

Aufgabe B2

Auf der Zylinderfläche $\varrho = a$ befinde sich der Flächenstrom

$$\mathbf{J}_F = \mathbf{e}_\varphi \, J_{F0} \, \cos\frac{\pi z}{a} \; .$$



Zu berechnen ist das magnetische Vektorpotential in den Bereichen $\varrho \leq a$ und $\varrho \geq a$.

Lösungshilfen:

$$\frac{\mathrm{d}(u\mathrm{I}_1(u))}{\mathrm{d}u} = u\,\mathrm{I}_0(u) \quad , \quad \frac{\mathrm{d}(u\mathrm{K}_1(u))}{\mathrm{d}u} = -u\,\mathrm{K}_0(u) \quad , \quad \mathrm{I}_1(u)\,\mathrm{K}_0(u) + \mathrm{K}_1(u)\,\mathrm{I}_0(u) = \frac{1}{u}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\varrho + \left(\frac{\partial A_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\varrho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial(\varrho A_\varphi)}{\partial\varrho} - \frac{\partial A_\varrho}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_z$$

Das Magnetfeld der Anordnung wird aus einem φ–gerichteten Vektorpotential

$$\mu_0 H_\varrho = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \quad , \quad \mu_0 H_z = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho A_\varphi)}{\partial\varrho}$$

bestimmt. Das Vektorpotential muß die vektorielle LAPLACEgleichung erfüllen

$$\nabla^2\left\{\mathbf{e}_\varphi\, A_\varphi(\varrho,\varphi)\right\} = 0 \; .$$

Die Lösungsfunktionen in radialer Richtung sind modifizierte BESSELfunktionen 1. Ordnung und in z-Richtung wird dieselbe Abhängigkeit wie beim erregenden Flächenstrom benötigt:

$$A_\varphi(\varrho,z) = C\left\{\begin{array}{lll} \mathrm{I}_1(k_z\varrho)\,\mathrm{K}_1(k_z a) & \text{für} & \varrho\leq a \\ \mathrm{K}_1(k_z\varrho)\,\mathrm{I}_1(k_z a) & \text{für} & \varrho\geq a \end{array}\right\}\cos k_z z \quad , \quad k_z = \frac{\pi}{a}$$

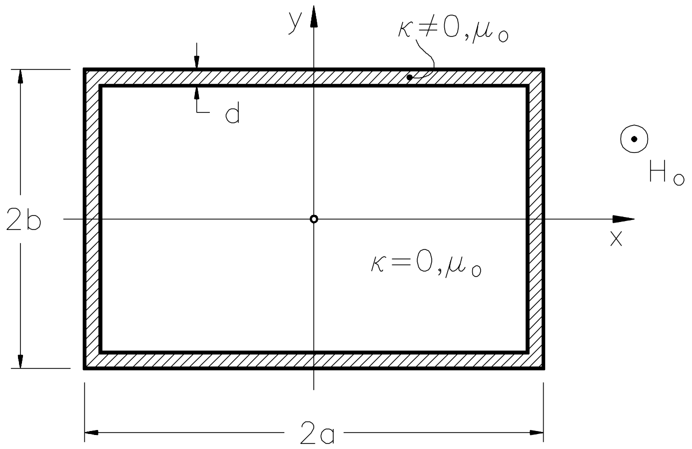
Der stetige Übergang des Vektorpotentials durch die Fläche $\varrho = a$ ist damit garantiert. Die z-Komponente der magnetischen Feldstärke ist unstetig:

$$H_z(\varrho = a-0) - H_z(\varrho = a+0) = \frac{1}{\mu_0 a}\left(\left.\frac{\partial(\varrho A_\varphi)}{\partial\varrho}\right|_{\varrho=a-0} - \left.\frac{\partial(\varrho A_\varphi)}{\partial\varrho}\right|_{\varrho=a+0}\right) = J_{F0}\,\cos\frac{\pi z}{a} \; .$$

$$k_z\underbrace{\left\{\mathrm{I}_1(k_z a)\,\mathrm{K}_0(k_z a) + \mathrm{K}_1(k_z a)\,\mathrm{I}_0(k_z a)\right\}}_{=(k_z a)^{-1}} C\,\cos k_z z = \mu_0\,J_{F0}\,\cos\frac{\pi z}{a} \quad\rightarrow\quad \boxed{C = \mu_0\,J_{F0}\,a} \; .$$

Aufgabe B3

Gegeben ist ein unendlich langer, dünnwandiger, rechteckförmiger Hohlleiter der Kantenlängen $2a$ und $2b$ und der Wandstärke $d \ll a, b$. Bestimme die magnetische Feldstärke innerhalb des Zylinders, wenn dieser einem ursprünglich homogenen quasistationären magnetischen Wechselfeld der Stärke $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_z H_0 \cos\omega t$ ausgesetzt wird. Der gesamte Raum habe die konstante Permeabilität μ_0.



Hinweise: Verschiebungsströme dürfen vernachlässigt werden. Außerdem soll die Skineindringtiefe sehr viel größer als die Leiterdicke sein.

Die wirbelstromdurchflossene Bewandung verhält sich analog zu einer stromdurchflossenen unendlich langen Spule. Damit ist das Feld im Innern homogen und gegenüber dem ungestörten Außenfeld um den Schirmfaktor S geschwächt

$$H_i = S\,H_0 \quad .$$

Umlauf der magnetischen Feldstärke:

$$\oint \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = I \quad \rightarrow \quad \boxed{H_0(1-S) = J_{FW}}$$

FARADAYsches Induktionsgesetz:

$$\oint \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = -\mathrm{j}\omega\psi_m = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \int_F \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{F}$$

OHMsches Gesetz:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\kappa d}\,\mathbf{J}_{FW}$$

Integration über den Umfang bzw. die Querschnittsfläche:

$$\boxed{J_{FW} = \mathrm{j}\omega\kappa\mu_0 d\,S\,H_0 \cdot \frac{\text{Fläche}}{\text{Umfang}}} \quad , \quad \text{Fläche} = 4ab \quad , \quad \text{Umfang} = 4(a+b) \quad .$$

$$\text{Schirmfaktor:} \quad \boxed{S = \frac{1}{1+\mathrm{j}\,\lambda} \quad , \quad \lambda = \frac{2d}{\delta_s^2}\cdot\frac{ab}{a+b} \quad , \quad \delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu_0}}}$$