| Technische Universität Berlin<br>Fachgebiet<br>Theoretische Elektrotechnik | **Prüfungen**<br>in Theoretischer Elektrotechnik |
|---|---|

Semester: SS 2005 Tag der Prüfung: 12.07.2005

Prüfung

im Fach

# TET II

**Name:** ........................

**Vorname:** ........................

**Matr.-Nr.:** ........................

**Studiengang:** ........................

⇑ *bitte in Druckbuchstaben ausfüllen* ⇑

*Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Rückseite!*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aufgabe | **A1** (2) | **A2** (2) | **A3** (2) | **A4** (3) | **A5** (3) | **A6** (3) | **A7** (2) |
| Punkte | | | | | | | |
| Aufgabe | **B1** (6) | **B2** (5) | **B3** (5) | **B4** (6) | **B5** (6) | $\Sigma$ P | Note |
| Punkte | | | | | | | |

# HINWEISE

(bitte vor Beginn sorgfältig lesen!)

a) Prüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Es muß aus insgesamt 8 Blättern bestehen (1 Deckblatt, 2 Blätter mit den Aufgaben A1 bis A7, jeweils 1 Blatt für die Aufgaben B1 bis B5). **Falls Sie ein unvollständiges Klausurexemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte ein einwandfreies Exemplar aushändigen.**

b) Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Vornamen, Namen und die Matrikelnummer ein.

c) Sie haben 120 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Aufgaben. Es sind maximal 45 Punkte erreichbar.

d) Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben nur den unter den Fragen freigelassenen Raum (bei den Fragen B1 bis B5 evt. auch die Rückseite). **Es werden beim Einsammeln keine Extrablätter angenommen!**

e) Achten Sie darauf, daß der Lösungsweg für den Korrektor nachvollziehbar ist.

f) Es sind **keinerlei Hilfsmittel** außer einem Schreibstift gestattet. Verwenden Sie aber bitte **keinen Bleistift**.

g) Die Teilnahme an dieser Klausur setzt eine **Anmeldung beim Prüfungsamt** voraus. Sollte diese nicht vorliegen, so kann die Klausur nicht benotet werden.

*Bitte bestätigen Sie durch Ihre Unterschrift, daß Sie die Hinweise gelesen und verstanden haben.*

Datum: .........

Unterschrift: ...........................

## Aufgabe A1

Auf der Kugeloberfläche $r = a$ befinde sich eine endliche Flächenladung $q_F(\vartheta)$ mit beliebiger Abhängigkeit vom Winkel $\vartheta$. Gib geeignete Lösungsansätze in Kugelkoordinaten für das Potential in den Teilräumen $r < a$ und $r > a$ an.

Unter Beachtung der Bedingung, daß das Potential für $r = 0$ und $r \to \infty$ endlich bleiben muß, lauten die Ansätze

$$\phi(r,\vartheta) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n\, r^n\, P_n(\cos\vartheta) & \text{für} \quad r < a \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n\, r^{-n-1}\, P_n(\cos\vartheta) & \text{für} \quad r > a \end{cases} .$$

$P_n(x)$ ist das Legendrepolynom der Ordnung $n$.

## Aufgabe A2

Zeige, daß das Potential $\phi$ eines homogenen elektrostatischen Feldes $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x\, E_0$ im 1. Glied der allgemeinen Lösungssumme der Laplacegleichung in Polarkoordinaten enthalten ist.

Potential des homogenen Feldes:

$$\phi = -\int E_x \; \mathrm{d}x \quad \to \quad \phi = -E_0\, x = -E_0\, \varrho \cos\varphi$$

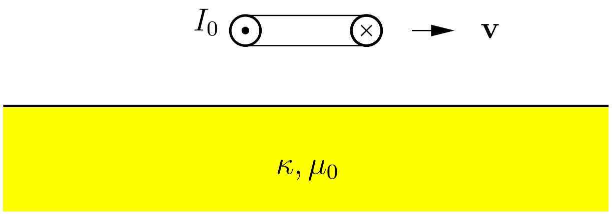
Ein Vergleich mit dem Lösungsansatz in Polarkoordinaten

$$\phi(\varrho,\varphi) = A_0 + B_0 \ln\frac{\varrho}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \varrho^n + B_n \frac{1}{\varrho^n} \right\} \{ C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi \}$$

zeigt, daß das Potential des homogenen Feldes durch $A_0 = B_0 = B_n = D_n = 0$ und $n = 1$ beschrieben wird.

## Aufgabe A3

Parallel zu einem leitenden Halbraum bewege sich eine gleichstromdurchflossene Leiterschleife mit der Geschwindigkeit $v$.




Begründe, warum es zu einer abhebenden Kraft auf die Leiterschleife kommt.

Infolge der Bewegung werden im leitenden Halbraum Wirbelströme induziert. Diese erzeugen ein sekundäres Magnetfeld, welches auf die Leiterschleife eine Kraft ausübt. Nach der LENZschen Regel muß diese Kraft eine abhebende Komponente aufweisen, weil das primäre Magnetfeld (also die Ursache) mit zunehmener Höhe der Leiterschleife im leitenden Halbraum abnimmt.

## Aufgabe A4

Gegeben ist eine Parallelplattenleitung mit dem Plattenabstand $d$.

**a)** Wie lautet der Zusammenhang zwischen der Wellenzahl $k$ und den Separationskonstanten?

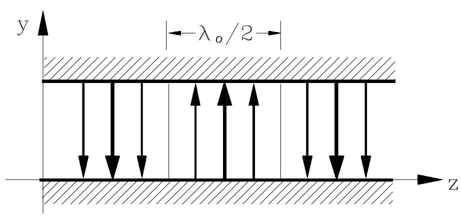
**b)** Wie groß sind die Grenzfrequenzen?

**c)** Gibt es eine Welle mit verschwindender Grenzfrequenz, und wie sieht deren Feldbild aus?

**a)** Separationskonstanten: $k_0^2 = k_z^2 + k_{yn}^2 \quad , \quad k_{yn} = \dfrac{n\pi}{d} \quad , \quad n = 0, 1, 2 \ldots$

**b)** Grenzfrequenzen: $\omega_{cn} = k_{cn} c_0 = n\pi \dfrac{c_0}{d}$

**c)** Ebene Welle mit $E_y = E_0 \, \mathrm{e}^{\,\mathrm{j}(\omega t - k_0 z)}$



## Aufgabe A5

Welches resultierende magnetische Feld stellt sich ein, wenn eine ebene Welle mit dem elektrischen Feld

$$\mathbf{E} = E_0 \, \mathbf{e}_x \, \cos(\omega t - kz) \quad , \quad k = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

in der Ebene $z = 0$ an einen idealen, ebenen Spiegel reflektiert wird?

$$\mathbf{H} = \frac{E_0}{Z_0} \, \mathbf{e}_y \, \{\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz)\} \quad , \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

## Aufgabe A6

In einer Parallelplattenleitung sei der Phasor $\mathbf{H}$ der magnetischen Feldstärke bekannt. Die Platten haben die Leitfähigkeit $\kappa$. Wie groß ist der zeitliche Mittelwert der Verlustleistungsdichte in einer Platte, wenn davon ausgegangen werden kann, daß die Wandströme in einer sehr dünnen Schicht (Schichtdicke=Eindringtiefe $\delta_S$) fließen und außerhalb dieser Schicht das Magnetfeld in der Platte verschwindet?

Die Stromdichte in einer Platte der Parallelplattenleitung ist nach den Voraussetzungen

$$|\mathbf{J}| = |\mathbf{H}_t| / \delta_S \; .$$

Zeitlicher Mittelwert der Verlustleistungsdichte:

$$\overline{P}_V = \frac{1}{2\kappa} \, \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^* = \frac{|\mathbf{H}_t|^2}{2\kappa\delta_S^2}$$

## Aufgabe A7

**a)** Was versteht man unter E-Wellen und H-Wellen?

**b)** Es sei $\mathbf{e}_z$ die Richtung der Wellenausbreitung in einem Wellenleiter. Der Wellenleiter sei strom- und ladungsfrei. Wie kann man dann mit Hilfe von Vektorpotentialen $\mathbf{A}^E$ bzw. $\mathbf{A}^H$ das elektromagnetische Feld von E- bzw. H-Wellen im Wellenleiter berechnen und welche Richtung haben die Vektorpotentiale?

---

**a)** Wenn $\mathbf{e}_z$ die Ausbreitungsrichtung ist, dann gilt

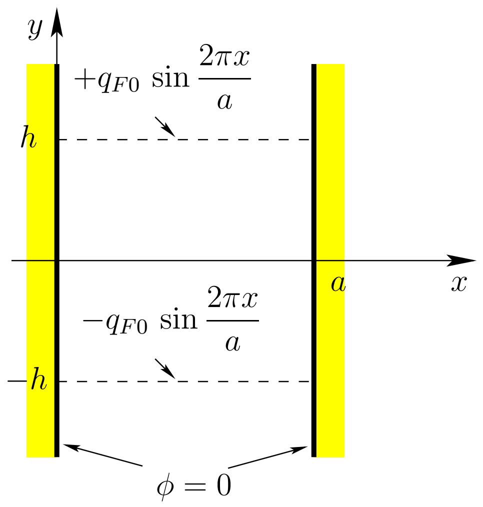
$$\text{für E-Wellen: } H_z = 0\ ,\ E_z \neq 0 \quad \text{für H-Wellen: } E_z = 0\ ,\ H_z \neq 0\ .$$

**b)** Man verwendet $z$-gerichtete Potentiale der Form

$$\mathbf{A}^E = A^E(\mathbf{r}, t)\, \mathbf{e}_z \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}^E = \nabla \times \mathbf{A}^E \quad , \quad \mathbf{A}^H = A^H(\mathbf{r}, t)\, \mathbf{e}_z \quad \rightarrow \quad \mathbf{E}^H = \nabla \times \mathbf{A}^H\ .$$

## Aufgabe B1

Die Ebenen $x = 0$ und $x = a$ seien leitend und geerdet. Auf den Flächen $y = \pm h$ befinden sich im Bereich $0 \le x \le a$ zwei Flächenladungen mit der Dichte $\pm q_{F0} \sin \frac{2\pi x}{a}$.




Zu bestimmen ist das Potential $\phi(x, y)$ im Bereich $y \ge 0$, $0 \le x \le a$.

Lösungsansätze:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= A \sin \frac{2\pi x}{a} \sinh \frac{2\pi y}{a} \, \mathrm{e}^{-2\pi h/a} \quad &\text{für} \quad 0 \le y \le h \\
\phi_2 &= A \sin \frac{2\pi x}{a} \, \mathrm{e}^{-2\pi y/a} \sinh \frac{2\pi h}{a} \quad &\text{für} \quad y \ge h
\end{aligned}$$

Dabei wurde bereits die Stetigkeit des Potentials in der Ebene $y = h$ berücksichtigt. Außerdem kann aufgrund der speziellen Flächenladung nur das Glied $n = 2$ der allgemeinen Lösungssumme auftreten. Die Ebene $y = 0$ ist schließlich aus Symmetriegründen eine Äquipotentialfläche $\phi = 0$.

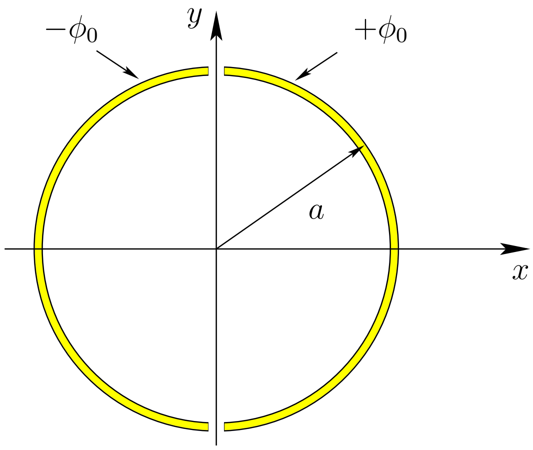
Stetigkeitsbedingung:

$$D_{y2} - D_{y1} = q_{F0} \sin \frac{2\pi x}{a} = \varepsilon_0 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)_{y=h}$$

$$A \frac{2\pi}{a} \underbrace{\left\{ \cosh \frac{2\pi h}{a} + \sinh \frac{2\pi h}{a} \right\}}_{\mathrm{e}^{2\pi h/a}} \mathrm{e}^{-2\pi h/a} = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{A = \frac{q_{F0} a}{2\pi \varepsilon_0}}$$

## Aufgabe B2

Ein unendlich langer, metallischer Hohlzylinder wird in Längsrichtung aufgeschnitten. Dann wird die linke Hälfte auf das Potential $-\phi_0$ und die rechte Hälfte auf das Potential $+\phi_0$ angehoben. Der Isolationsabstand zwischen den beiden Halbzylindern sei vernachlässigbar klein.




Zu bestimmen ist das elektrostatische Potential $\phi(\varrho, \varphi)$ außerhalb des Hohlzylinders $\varrho > a$.

Lösungsansatz für $\varrho > a$:

$$\phi(\varrho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{a}{\varrho}\right)^n \cos n\varphi$$

Es wurde bereits berücksichtigt, daß das Potential aus Symmetriegründen in der Ebene $x = 0$ verschwindet und für steigende Werte von $\varrho$ abklingen muß.

Randbedingung:

$$\phi(\varrho = a, 0 \leq \varphi \leq \pi/2) = \phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\varphi$$

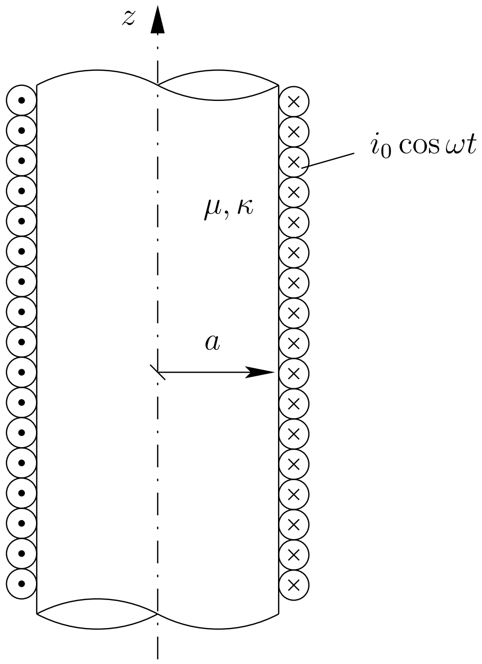
FOURIERentwicklung:

$$\frac{\pi}{4} A_n = \phi_0 \int_0^{\pi/2} \cos n\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \phi_0 \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$\boxed{\phi(\varrho, \varphi) = \phi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \left(\frac{a}{\varrho}\right)^{2n-1} \cos(2n-1)\varphi}$$

## Aufgabe B3

Ein sehr langer leitender Zylinder (Radius $a$, Länge $l \gg a$, Leitfähigkeit $\kappa$) ist außen mit einer dicht gepackten Spule mit $N$ Windungen bewickelt, durch die ein Wechselstrom $i(t) = i_0 \cos \omega t$ fließt.




Berechne die Wirbelstromdichte im Zylinder unter Vernachlässigung der Randeffekte.

---

Außerhalb des Zylinders (für $\varrho \geq a$) verschwindet die magnetische Feldstärke. Innerhalb des Zylinders ist sie $z$ -gerichtet und erfüllt als komplexer Phasor die Diffusionsgleichung:

$$\Delta H_z = \frac{\mathrm{d}^2 H_z}{\mathrm{d}\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}\varrho} = k^2 H_z \quad , \quad k^2 = \mathrm{j}\omega\mu\kappa \quad \text{für} \qquad \varrho \leq a$$

Lösungen dieser Differentialgleichung sind modifizierte Besselfunktionen:

$$H_z = A I_0(k\varrho) + B K_0(k\varrho)$$

Wegen $K_0(0) = \infty$ ist $B = 0$ .

Randbedingung für $\varrho = a$:

$$\oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = I \quad \rightarrow \quad [H_z(\varrho = a) - 0]\, l = i_0 N \quad \rightarrow \quad A = \frac{i_0 N}{l} \frac{1}{I_0(ka)}$$

Nach Einsetzen der Konstanten erhält man:

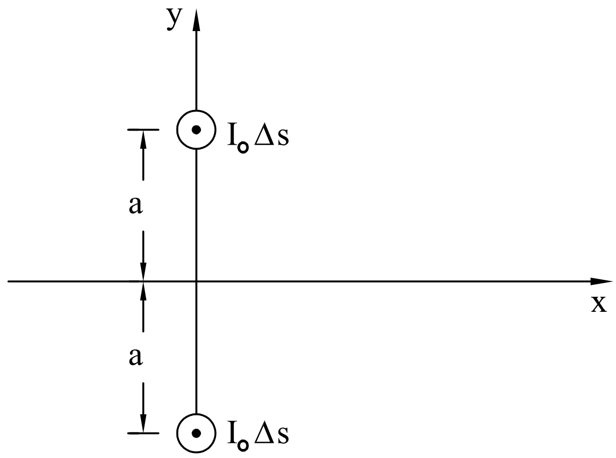
$$H_z = \frac{i_0 N}{l} \frac{I_0(k\varrho)}{I_0(ka)}$$

Wirbelströme:

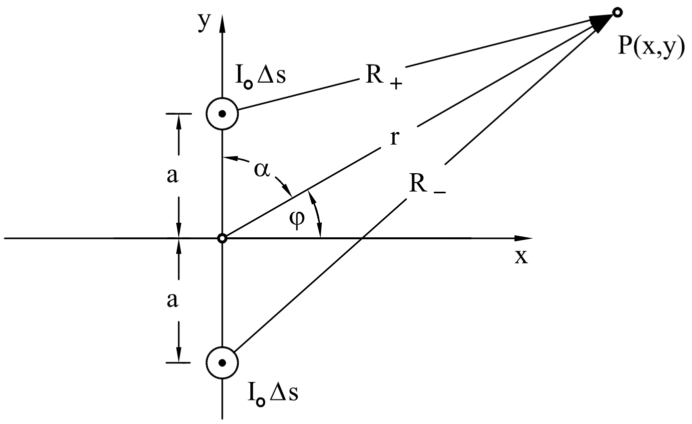
$$\mathbf{J}_W = \nabla \times \mathbf{H} = \nabla H_z \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial H_z}{\partial \varrho} = -k\,\frac{i_0 N}{l} \frac{I_1(k\varrho)}{I_0(ka)}\,\mathbf{e}_\varphi \quad , \quad k = \frac{1+\mathrm{j}}{\delta_S} \ , \ \delta_S = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu_0}}$$

## Aufgabe B4

Gegeben sind zwei gleiche $z$-gerichtete HERTZsche Dipole der Länge $\Delta s$ und mit dem Strom $I_0 \cos\omega t$, die sich auf der $y$-Achse an den Orten $y = a$ bzw. $y = -a$ befinden.




Berechne den zeitlichen Mittelwert der Energieflußdichte im Fernfeld in der Ebene $z = 0$!




Im Fernfeld gilt:

$$R_+ \approx r - a\,\cos\alpha$$
$$R_- \approx r + a\,\cos\alpha \quad , \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Bei Vernachlässigung des unterschiedlichen Dipolortes in der Amplitude (aber nicht in der Phase!) lautet das magnetische Fernfeld der Anordnung

$$\begin{aligned} H_\varphi &\approx \mathrm{j}\,\frac{I_0 k \Delta s}{4\pi r}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,kR_+} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,kR_-}\right) \\ &\approx \mathrm{j}\,\frac{I_0 k \Delta s}{4\pi r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,kr}\underbrace{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,ka\cos\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,ka\cos\alpha}\right)}_{2\,\cos(ka\sin\varphi)} = \mathrm{j}\,\frac{I_0 k \Delta s}{2\pi r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,kr}\,\cos(ka\sin\varphi) \end{aligned}$$

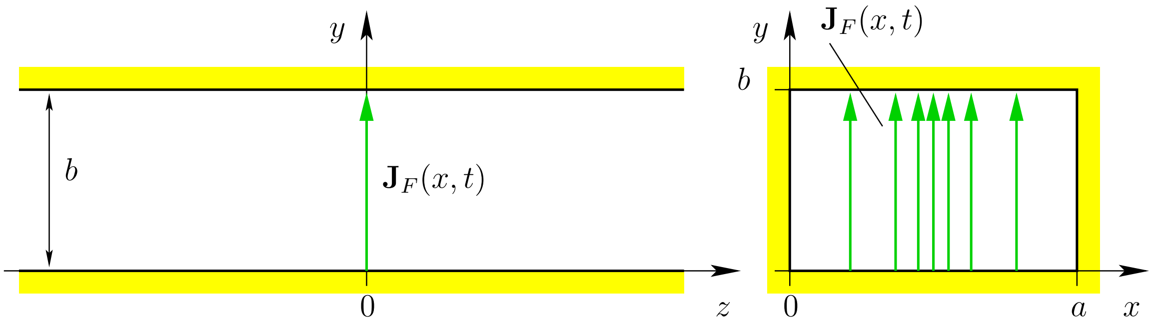
**Energieflußdichte:**

$$\mathbf{S}_k = \frac{1}{2}\,(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad , \quad \mathbf{E} = Z_0\,(\mathbf{H} \times \mathbf{e}_r)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{S_{k,r} = \frac{1}{2}\,Z_0 |H_\varphi|^2 = \frac{1}{2}\,Z_0\left(\frac{I_0 k \Delta s}{2\pi r}\right)^2 \cos^2(ka\sin\varphi)} \quad \textbf{mit} \quad k = \frac{\omega}{c} \quad , \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

## Aufgabe B5

Gegeben ist ein unendlich langer Rechteckhohlleiter mit den Kantenlängen $a$ und $b$. In der Ebene $z = 0$ befinde sich zusätzlich ein Flächenstrom $\mathbf{J}_F(x,t) = \mathbf{e}_y\, J_{F0}\, \sin(\pi x/a)\, \cos\omega t$.




**a)** Welcher Wellentyp wird durch den Flächenstrom angeregt?

**b)** Welche Differentialgleichung erfüllt der Phasor der elektrischen Feldstärke?

**c)** Berechne die vom Flächenstrom hervorgerufene elektrische Feldstärke im Rechteckhohlleiter.

---

**a)** Der gegebene Flächenstrom wird die $H_{10}$-Welle mit dem Phasor der elektrischen Feldstärke

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_y\, E_0\, \sin\frac{\pi x}{a}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z|z|} \quad , \quad k_z^2 + \frac{\pi^2}{a^2} = k_0^2$$

anregen.

**b)** Der Phasor der elektrischen Feldstärke erfüllt die HELMHOLTZgleichung

$$\nabla^2 E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -k_0^2\, E_y\ .$$

**c)** Die Amplitude $E_0$ wird aus der Stetigkeitsbedingung für die magnetische Feldstärke bestimmt:

$$H_x(z=+0) - H_x(z=-0) = 2\, H_x(z=+0) = J_{F0}\, \sin\frac{\pi x}{a}$$

$$-\mathrm{j}\omega\mu_0 H_x(z=+0) = -\left.\frac{\partial E_y}{\partial z}\right|_{z=+0} = \mathrm{j}k_z\, E_0\, \sin\frac{\pi x}{a} \quad \rightarrow \quad \boxed{E_0 = -\frac{J_{F0}}{2}\,\frac{\omega\mu_0}{k_z}}$$