Technische Universität Berlin Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik	**Prüfungen** in Theoretischer Elektrotechnik

Semester: SS 2006 Tag der Prüfung: 11.07.2006

Prüfung

im Fach

TET II

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

⇑ *bitte in Druckbuchstaben ausfüllen* ⇑

Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Rückseite!

Aufgabe	**A1** (2)	**A2** (3)	**A3** (3)	**A4** (2)	**A5** (2)	**A6** (3)	**A7** (3)
Punkte							
Aufgabe	**B1** (6)	**B2** (5)	**B3** (6)	**B4** (5)	**B5** (5)	Σ P	Note
Punkte							

HINWEISE

(bitte vor Beginn sorgfältig lesen!)

a) Prüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Es muß aus insgesamt 8 Blättern bestehen (1 Deckblatt, 2 Blätter mit den Aufgaben A1 bis A7, jeweils 1 Blatt für die Aufgaben B1 bis B5). **Falls Sie ein unvollständiges Klausurexemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte ein einwandfreies Exemplar aushändigen.**

b) Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Vornamen, Namen und die Matrikelnummer ein.

c) Sie haben 120 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Aufgaben. Es sind maximal 45 Punkte erreichbar.

d) Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben nur den unter den Fragen freigelassenen Raum (bei den Fragen B1 bis B5 evt. auch die Rückseite). **Es werden beim Einsammeln keine Extrablätter angenommen!**

e) Achten Sie darauf, daß der Lösungsweg für den Korrektor nachvollziehbar ist.

f) Es sind **keinerlei Hilfsmittel** außer einem Schreibstift gestattet. Verwenden Sie aber bitte **keinen Bleistift**.

g) Die Teilnahme an dieser Klausur setzt eine **Anmeldung beim Prüfungsamt** voraus. Sollte diese nicht vorliegen, so kann die Klausur nicht benotet werden.

Bitte bestätigen Sie durch Ihre Unterschrift, daß Sie die Hinweise gelesen und verstanden haben.

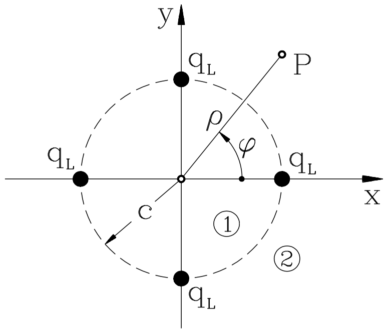
Datum: ....

Unterschrift: ....

Aufgabe A1

Gegeben ist eine Anordnung aus 4 symmetrisch auf einem Kreis mit dem Radius c angeordneten Linienladungen q_L.

a) Welcher der angegebenen Ansätze in Polarkoordinaten beschreibt das Potential im Außenraum korrekt? (Bitte ankreuzen!)



$\phi^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{c^n}{\varrho^n} \cos n\varphi$	
$\phi^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{c^n}{\varrho^n} \sin n\varphi$	
$\phi^{(2)} = A_0 \ln \frac{\varrho}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{c^n}{\varrho^n} \cos n\varphi$	
$\phi^{(2)} = A_0 \ln \frac{\varrho}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\varrho^n}{c^n} \cos n\varphi$	

b) Aufgrund der Symmetrie lassen sich entweder die geraden oder ungeraden Indizes n ausschließen. Welche sind es?

b) Das Potential muß symmetrisch zur y-Achse sein, so daß ungerade Indizes n ausgeschlossen werden können, $A_n = 0$ für $n = 1, 3, 5, \ldots$

Aufgabe A2

Gegeben sei in kartesischen Koordinaten ein Gebiet mit der vorgegebenen Magnetisierung

$$\mathbf{M} = M_0 \cos \beta z \, \mathbf{e}_y \; ,$$

wobei β und M_0 Konstanten sind.
Stelle ausgehend von den Grundgleichungen der Magnetostatik die Poissongleichung für das Vektorpotential in dem magnetisierten Bereich auf.

Aus den Grundgleichungen des magnetostatischen Feldes

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \mathbf{J}_{mag} \right) \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

erhält man nach Einführung des Vektorpotentials in der Form $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ die Feldgleichung

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}_{mag} = \nabla \times \mathbf{M} = -M_0 \mathbf{e}_y \times \nabla \cos \beta z = \mathbf{e}_x M_0 \beta \sin \beta z$$

welche mit der willkürlichen Festlegung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ zur Poissongleichung wird:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu_0 M_0 \beta \sin \beta z$$

Aufgabe A3

Aus den MAXWELLschen Gleichungen für beliebige Zeitabhängigkeit leite man in einem homogenen, leitfähigen Medium eine Differentialgleichung 2. Ordnung für die magnetische Feldstärke her.
Unter welchen Umständen vereinfacht sich diese Gleichung zur *Diffusionsgleichung*?

Die Maxwellschen Gleichungen lauten für beliebige zeitabhängige Felder:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_v \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

mit den linearen Materialgleichungen $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\mathbf{J} = \kappa\mathbf{E}$.

Im homogenen Medium sind μ und ε konstant: $\nabla^2\mathbf{H} = \mu\kappa\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}$

$$\mathbf{J} \gg \dot{\mathbf{D}} \quad \rightarrow \quad \nabla^2\mathbf{H} - \mu\kappa\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad \text{Diffusionsgl.}$$

Aufgabe A4

Gegeben sei eine unmagnetische ($\mu = \mu_0$), leitfähige ($\kappa \neq 0$), dünnwandige Hohlkugel, die in ein quasistationäres, homogenes, magnetisches Wechselfeld $H = H_0 \cos\omega t$ eingebracht wird. Erkläre die Feldabschwächung im Innenraum der Hohlkugel. Von welchem Parameter wird dieser Effekt bestimmt?

Das magnetische Wechselfeld induziert in der leitenden Hohlkugel einen Wirbelstrombelag. Dieser ist nach der LENZschen Regel so gerichtet, daß er seiner Ursache entgegenwirkt und damit das Feld im Innern abschwächt. Der Effekt wird im wesentlichen durch die *Skineindringtiefe*

$$\delta_S = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu_0}}$$

bestimmt und wird mit kleiner werdender Eindringtiefe größer.

Aufgabe A5

a) Notiere mit Hilfe des POYNTINGschen Vektors den Energieerhaltungssatz für elektromagnetische Felder in einem leitfähigen Volumen V mit der Oberfläche O.

b) Wie lautet der komplexe POYNTINGsche Vektor, und welche Bedeutung hat sein Realteil?

---

a) Energieerhaltungssatz:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V (w_e + w_m)\,\mathrm{d}V = \oint \mathbf{S}\cdot\mathrm{d}\mathbf{O} + \int\limits_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}V$$

b) komplexer POYNTINGscher Vektor:

$$\mathbf{S}_k = \frac{1}{2}\left(\tilde{\mathbf{E}}\times\tilde{\mathbf{H}}^*\right) \quad , \quad \mathrm{Re}\{\mathbf{S}_k\}: \qquad \text{zeitl. Mittelwert der Energieflußdichte}$$

Aufgabe A6

a) Wie lauten die Phasoren der elektrischen und magnetischen Feldstärke einer in y-Richtung polarisierten ebenen Welle, die sich in z-Richtung mit der Amplitude E_0 ausbreitet?

b) Gib den zeitlichen Mittelwert der durch einen Querschnitt A der xy-Ebene transportierten Leistung an!

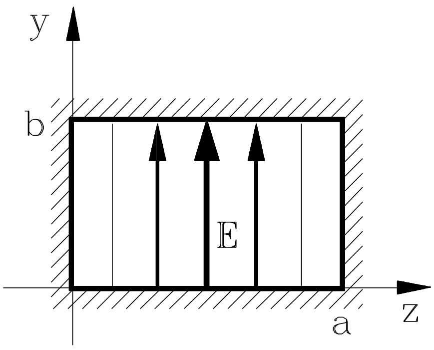
---

a) $\mathbf{E} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)}\,\mathbf{e}_y \quad , \quad \mathbf{H} = -\dfrac{E_0}{Z_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)}\,\mathbf{e}_x \quad , \quad Z_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad , \quad k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$

b) $\overline{P} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\displaystyle\int\limits_A (\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)\cdot\mathrm{d}\mathbf{F} = \dfrac{E_0^2\,A}{2\,Z_0}$

Aufgabe A7

Gib die Differentialgleichung für den Phasor des elektrischen Feldes einer H_{10}-Welle im Rechteckhohlleiter der Kantenlängen a und b an, und löse sie unter Beachtung der Randbedingung an der Hohlleiterwand.



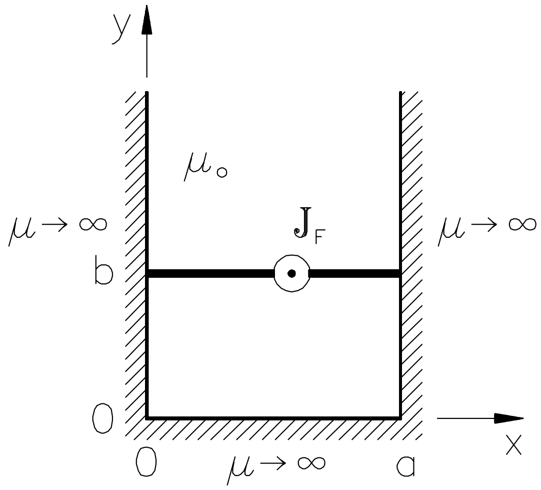
$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 E_y$$

$$\text{Lösung}: \quad E_y = E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \quad \text{mit} \quad k_z^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \pi^2/a^2$$

Aufgabe B1

Die Ebenen $x = 0$, $x = a$ sowie $y = 0$ bilden die Wände einer Nut im ansonsten hochpermeablen Gesamtraum ($\mu \to \infty$). Innerhalb der Nut fließe in der Höhe $y = b$ der Flächenstrom

$$\mathbf{J}_F = \mathbf{e}_z \, J_{F0} \, \cos \frac{\pi x}{a}$$



Bestimme das magnetische Vektorpotential innerhalb der Nut!

Feldgleichung (ebenes Problem, z–gerichtete Ströme): $\quad \nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad$ mit $\quad \mathbf{A} = \mathbf{e}_z A(x, y)$

Feldkomponenten: $\quad H_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \quad , \quad H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \quad .$

Randbedingungen:

(i) $H_y \Big|_{\substack{x=0 \\ x=a}} \quad , \quad H_x \Big|_{y=0} = 0$

(ii) $(H_{x1} - H_{x2})_{y=b} = J_{F0} \cos \frac{\pi x}{a}$

(iii) $(B_{y1} - B_{y2})_{y=b} = 0$

Wegen (ii) wird nur das Glied $n = 1$ der Lösungssumme auftreten.

Aus den obigen Überlegungen ergeben sich die Potentialansätze:

$$A_1 = B \cos \frac{\pi x}{a} \cosh \frac{\pi y}{a} \quad , \quad A_2 = C \cos \frac{\pi x}{a} \exp \left[-\frac{\pi}{a} (y - b) \right]$$

$$\text{(iii)} \quad \to \quad B \cosh \frac{\pi b}{a} = C \quad , \quad \text{(ii)} \quad \to \quad B \frac{\pi}{a} \sinh \frac{\pi b}{a} + C \frac{\pi}{a} = \mu_0 J_{F0}$$

Auflösen nach den gesuchten Konstanten der Potentialansätze:

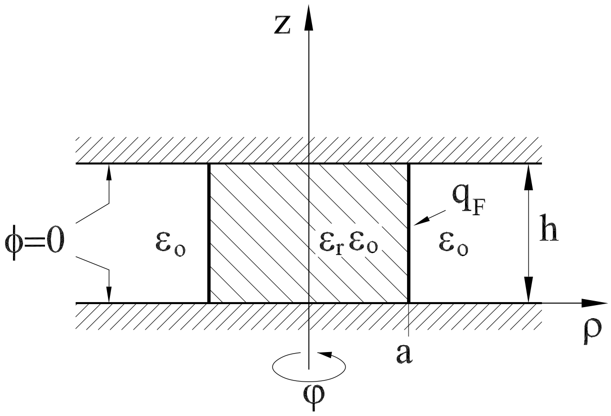
$$B = \frac{\mu_0 J_{F0} a}{\pi} \frac{1}{\sinh \frac{\pi b}{a} + \cosh \frac{\pi b}{a}} \quad , \quad C = \frac{\mu_0 J_{F0} a}{\pi} \frac{\cosh \frac{\pi b}{a}}{\sinh \frac{\pi b}{a} + \cosh \frac{\pi b}{a}}$$

Aufgabe B2

In den Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) sind die Ebenen $z = 0$ und $z = h$ als geerdete leitende Beläge ausgeführt, während auf der Fläche $\varrho = a$ zwischen den Platten eine Flächenladung der Dichte

$$q_F = q_{F0} \sin \frac{\pi z}{h}$$

angeordnet ist. Der Raum $\varrho < a$ sei mit Dielektrikum ($\varepsilon_r \neq 1$) gefüllt.



Bestimme das Potential zwischen den geerdeten Platten!

Potentialansätze:

Aufgrund der speziellen Potentialvorgabe wird nur ein Glied der allgemeinen Lösungssumme angeregt!

$$\varrho \leq a: \quad \phi_1 = A\, I_0\left(\frac{\pi \varrho}{h}\right) \sin \frac{\pi z}{h} \quad , \quad \varrho \geq a: \quad \phi_2 = B\, K_0\left(\frac{\pi \varrho}{h}\right) \sin \frac{\pi z}{h}$$

Stetigkeitsbedingungen für $\varrho = a$:

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \rightarrow \quad A\, I_0\left(\frac{\pi a}{h}\right) = B\, K_0\left(\frac{\pi a}{h}\right)$$

$$\varepsilon_r \frac{\partial \phi_1}{\partial \varrho} - \frac{\partial \phi_2}{\partial \varrho} = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0} \sin \frac{\pi z}{h} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_r\, A\, I_1\left(\frac{\pi a}{h}\right) + B\, K_1\left(\frac{\pi a}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0}$$

Auflösung nach den unbekannten Konstanten:

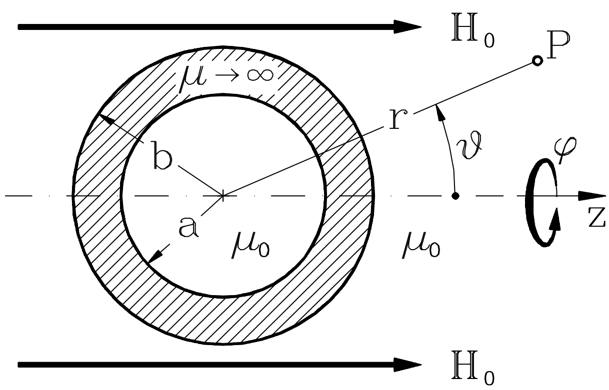
$$B = \frac{h}{\pi} \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0} \frac{I_0\left(\frac{\pi a}{h}\right)}{\varepsilon_r\, K_0\left(\frac{\pi a}{h}\right)\ I_1\left(\frac{\pi a}{h}\right) + I_0\left(\frac{\pi a}{h}\right)\ K_1\left(\frac{\pi a}{h}\right)} \quad , \quad A = B\, \frac{K_0\left(\frac{\pi a}{h}\right)}{I_0\left(\frac{\pi a}{h}\right)}$$

Aufgabe B3

Gegeben ist eine hochpermeable Hohlkugel mit dem Innenradius a und dem Außenradius b. Diese Kugel wird in ein ursprünglich homogenes, magnetostatisches Feld der Stärke H_0 eingebracht.

a) Berechne das resultierende magnetische Feld auf der Oberfläche $r = b$ mit Hilfe des magnetischen Skalarpotentials.

b) Skizziere den Verlauf der B–Linien im gesamten Raum.



a) Wegen $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ kann man ein Skalarpotential in der Form $\mathbf{H} = -\nabla \phi_m$ mit $\nabla^2 \phi_m = 0$ einführen.

Allgemeiner Lösungsansatz in Kugelkoordinaten:

$$\phi_m(r, \vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{-n-1} \right) \, P_n(\cos\vartheta)$$

Primäres Potential des homogenen Feldes:

$$\phi_p = -H_0 z = -H_0 \, r \, \cos\vartheta = -H_0 \, r^1 \, P_1(\cos\vartheta) \quad \rightarrow \quad n = 1$$

Sekundäres Potential infolge der Hohlkugel: $\qquad \phi_s = D \, \dfrac{b^2}{r^2} \, \cos\vartheta$

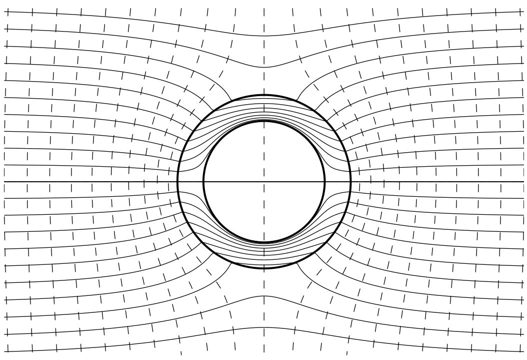
Randbedingung auf der Fläche $r = b$:

$$\left. \frac{\partial(\phi_p + \phi_s}{\partial \vartheta} \right|_{r=b} \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad D - H_0 b = 0 \quad , \quad D = H_0 b$$

Feldstärke auf der Oberfläche:

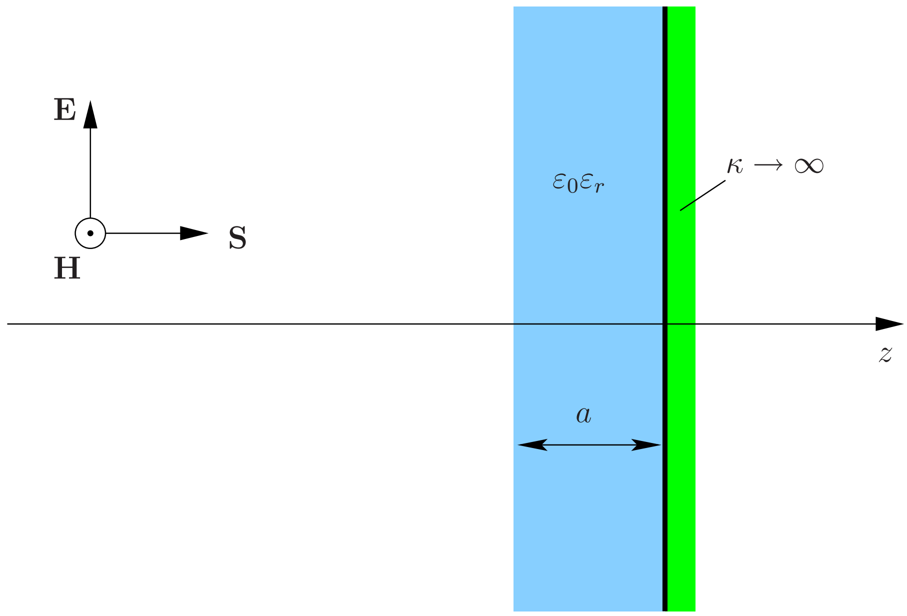
$$\mathbf{H}(r = b, \vartheta) = - \left. \frac{\partial(\phi_p + \phi_s)}{\partial r} \right|_{r=b} \mathbf{e}_r = H_0 \left(2 \frac{b^3}{r^3} + 1 \right)_{r=b} \cos\vartheta \, \mathbf{e}_r = 3 H_0 \, \cos\vartheta \, \mathbf{e}_r$$

b) Feldverlauf:



Aufgabe B4

Eine harmonische, ebene Welle trifft gemäß Abbildung auf eine dielektrische Schicht der Dicke a auf, welche auf der rechten Seite mit einer perfekt leitenden Folie belegt ist. Das Magnetfeld der einfallenden Welle habe die Amplitude H_0.



Zu bestimmen ist die Amplitude der reflektierten Welle vor dem Dielektrikum.

Felder vor dem Dielektrikum $z < -a$:

$$H_1 = H_0 \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 z} + R\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_1 z} \right) \quad , \quad E_1/Z_1 = H_0 \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 z} - R\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_1 z} \right)$$

Felder im Dielektrikum $-a \leq z \leq 0$:

$$H_2 = H_0 \left(A_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 z} + B_2\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_2 z} \right) \quad , \quad E_2/Z_2 = H_0 \left(A_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 z} - B_2\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_2 z} \right)$$

mit

$$k_1^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \quad , \quad k_2^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \quad , \quad Z_1 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \quad , \quad Z_2 = \sqrt{\mu_0/(\varepsilon_0\varepsilon_r)}\,.$$

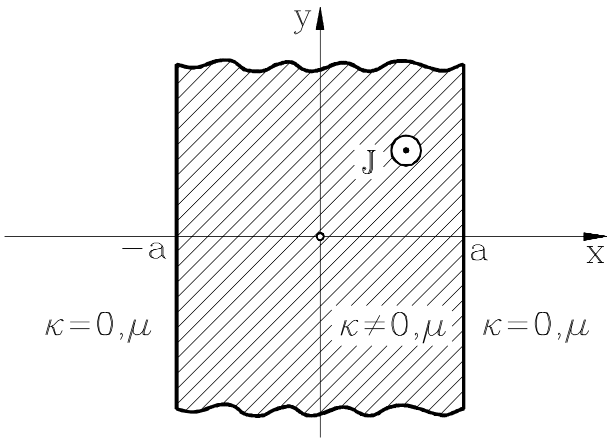
Wegen $E_2(z=0) = 0$ ist $A_2 = B_2$.
Stetigkeitsbedingungen für $z = -a$:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 a} + R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 a} = 2A_2 \cos k_2 a \quad , \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 a} - R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 a} = 2\mathrm{j}A_2 \frac{Z_2}{Z_1} \sin k_2 a$$

$$\mathrm{j}\, Z_2 \tan k_2 a \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 a} + R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 a} \right) = Z_1 \left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_1 a} - R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 a} \right) \quad \rightarrow \quad \boxed{R = \mathrm{e}^{2\mathrm{j}k_1 a} \frac{Z_1 - \mathrm{j}\, Z_2 \tan k_2 a}{Z_1 + \mathrm{j}\, Z_2 \tan k_2 a}}$$

Aufgabe B5

Der gesamte Raum $|x| \leq a$ sei mit homogener Materie der Leitfähigkeit $\kappa \neq 0$ und der Permeabilität μ ausgefüllt und werde pro Länge h der y–Koordinate von einem Strom $I = I_0 \cos \omega t$ mit konstanter Amplitude I_0 und der Kreisfrequenz ω durchflossen, während der übrige umgebende Raum aus nichtleitendem, homogenem Medium $\kappa = 0$ mit gleicher Permeabilität μ besteht.



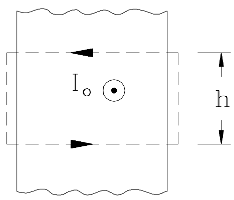
Zu bestimmen ist die Verteilung der z–gerichteten Stromdichte $\mathbf{J} = \mathbf{e}_z J(x)$ über den Leiterquerschnitt bei Vernachlässigung des Verschiebungsstromes.

Diffusionsgleichung: $\nabla^2 \mathbf{H} = \mathrm{j}\omega\kappa\mu\mathbf{H}$, $\mathbf{H} = \mathbf{e}_y H(x) \quad \rightarrow \quad \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \mathrm{j}\omega\kappa\mu H$

Lösungsansatz: $H(x) = A \sinh\left(\underbrace{\sqrt{j\omega\kappa\mu}}_{\frac{1+j}{\delta_s}} x\right) + B \cosh\left(\sqrt{j\omega\kappa\mu} x\right)$, $\delta_s = \sqrt{\dfrac{2}{\omega\kappa\mu}}$

Symmetrie des magnetischen Feldes: $B = 0$

Umlaufintegral: $\oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = I_0$



$$[H(x = a) - H(x = -a)]\ h = I_0 \quad \rightarrow \quad 2A \sinh\left(\frac{1+j}{\delta_s} a\right) = \frac{I_0}{h}$$

Resultierendes Magnetfeld: $H(x) = \dfrac{I_0}{2h} \dfrac{\sinh\left(\frac{1+j}{\delta_s} x\right)}{\sinh\left(\frac{1+j}{\delta_s} a\right)}$

Stromdichte: $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{e}_z \dfrac{\partial H}{\partial x} = \mathbf{e}_z\, J(x) \ \rightarrow\ J(x) = \dfrac{1+j}{\delta_s} \dfrac{I_0}{2h} \dfrac{\cosh\left(\frac{1+j}{\delta_s} x\right)}{\sinh\left(\frac{1+j}{\delta_s} a\right)}$