Technische Universität Berlin Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik	**Prüfungen** in Theoretischer Elektrotechnik
Semester: SS 2007	Tag der Prüfung: 17.07.2007

Prüfung

im Fach

TET II

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

⇑ *bitte in Druckbuchstaben ausfüllen* ⇑

Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Rückseite!

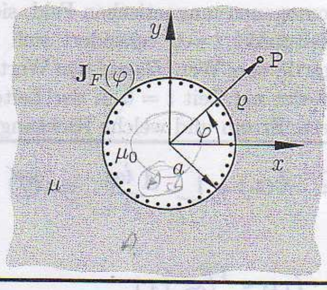
Aufgabe	**A1** (3)	**A2** (2)	**A3** (2)	**A4** (2)	**A5** (3)	**A6** (3)	**A7** (3)
Punkte							
Aufgabe	**B1** (6)	**B2** (5)	**B3** (5)	**B4** (5)	**B5** (6)	Σ P	Note
Punkte							

Aufgabe A1

Im Gesamtraum mit der Permeabilität μ befinde sich eine zylindrische Bohrung mit dem Radius a. Auf der Oberfläche der Bohrung fließe ein vom Winkel φ abhängiger Flächenstrom $\mathbf{J}_F = \mathbf{e}_z\, J_F(\varphi)$.

a) Gib alle Rand- und Stetigkeitsbedingungen an, die das Vektorpotential in Polarkoordinaten erfüllen muß.

b) Wie lautet das Vektorpotential, wenn der Flächenstrom konstant, d.h. unabhängig vom Winkel φ ist?



Aufgabe A2

Gegeben ist ein *Wanderwellenstrombelag*

$$J_F(x,t) = J_{F0} \sin \frac{\pi(x - vt)}{b} \quad ,$$

der sich mit der Geschwindigkeit v in x–Richtung bewegt.
Bestimme den *Phasor* dieses Flächenstromes und gib die Kreisfrequenz des Vorganges an!

Wegen

$$\sin \frac{\pi(x-vt)}{b} = \mathrm{Re}\left\{ j \cdot e^{-j\omega x/v} \cdot e^{j\omega t} \right\}, \quad \omega = \frac{\pi v}{b}$$

lautet der Phasor des Flächenstromes

$$J_F(x) = j \cdot J_{F0} \cdot e^{-j\omega x/v}$$

A1) a) $\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\Big|_{\substack{F\\ \varrho = a}} = J_F$, $\vec{n} \cdot (\vec{B}_{2} - \vec{B}_1)\Big|_{\substack{F\\ \varrho = a}} = 0$

$\vec{A}_m = A_m(\varrho, \varphi) \cdot \vec{e}_z$

$$A_m(\varrho,\varphi) = \cancel{(A_0 + B_0 \ln\tfrac{\varrho}{a})(C_0 + D_0 \varphi)} + \sum_{p \neq 0} (\underbrace{A_p \cdot (\tfrac{\varrho}{a})^p}_{\text{innere}} + \underbrace{B_p \cdot (\tfrac{a}{\varrho})^p}_{\text{außere}}) \cdot (C_p \cdot \cos p\varphi + D_p \cdot \sin p\varphi)$$

$H_{\varphi_2} - H_{\varphi_1}\Big|_{\substack{F\\ \varrho = a}} = J_F$ bei $x = 0$ soll symm. d.h. $D_p = 0$

$A_i = \sum_{p \neq 0} A_p (\frac{\varrho}{a})^p \cdot \cos p\varphi$; $A_a = \sum_{p \neq 0} B_p (\frac{a}{\varrho})^p \cdot \cos p\varphi$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\varrho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\varrho & \varrho \vec{e}_\varphi & e_z \\ \partial/\partial\varrho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial \varrho} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$H_{\varphi_i} = -\frac{\partial A_{zi}}{\partial \varrho} \cdot \frac{1}{\mu}$ $H_{\varphi_a} = -\frac{\partial A_{za}}{\partial \varrho} \cdot \frac{1}{\mu}$

$H_{\varphi_a} - H_{\varphi_i}\Big|_{\varrho = a} = J_{F_z}$

$B_{\varrho i} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial A_{zi}}{\partial \varphi}$ $B_{\varrho a} = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial A_{za}}{\partial \varphi}$ $\frac{\partial A_{za}}{\partial \varphi} = \frac{\partial A_{zi}}{\partial \varphi}$

b)

$$A_m(\varrho,\varphi) = (A_0 + B_0 \ln\tfrac{\varrho}{a})(C_0 + D_0\varphi) + \sum_{p \neq 0} (A_p (\tfrac{\varrho}{a})^p + B_p (\tfrac{a}{\varrho})^p) \cdot (C_p \cdot \cos p\varphi + D_p \cdot \sin p\varphi)$$

$J_F = \text{Const}$ dh unabhängig von φ.

dann $n = 0 = p$ $\cos 0 = 1$ $\sin 0 = 0$

Red:

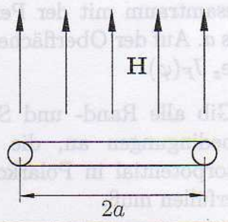
$A_{m_a}(\varrho,\varphi) = A_1 + B_1 \ln\frac{\varrho}{a}$ $A_{m_i} = B_2$

innere ohne $\ln\frac{\varrho}{a}$

außere mit $\ln\frac{\varrho}{a}$

Aufgabe A3

Eine kreisförmige, sehr dünne Leiterschleife mit dem Radius a, dem OHMschen Widerstand R und der Selbstinduktivität L, befinde sich in einem homogenen magnetischen Feld, siehe Bild. Zum Zeitpunkt $t = 0$ verändert sich das Feld sprungartig vom Wert H_0 auf den Wert H_1. Wie groß ist der zur Zeit $t = 0$ in der Leiterschleife induzierte Strom und welche Richtung hat er?



$$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{d\,i(t)}{dt} = \phi = -\frac{d\,\Psi_m(t)}{dt} = 0$$ kurzschluss

L_r $H_1 - H_0$

$$L \cdot i(t) = \Psi_m(t)$$

$$i(t) = A \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Aufgabe A4

Für einen HERTZschen Dipol gebe man die elektrische Feldstärke

a) im Nahfeld

b) im Fernfeld

an. Welcher Zusammenhang besteht im Fernfeld zwischen der elektrischen und magnetischen Feldstärke?

a) Gibt's E_r, E_u, H_u

$$\frac{E_r}{H_u} = \cot u \, \frac{2}{j\omega\varepsilon_r} \qquad \frac{E_u}{H_u} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_r}$$

b) Gibt's E_u, H_u

$$\frac{E_u}{H_u} = Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Aufgabe A5

In einer Parallelplattenleitung mit dem Plattenabstand d soll sich eine senkrecht polarisierte Welle ausbreiten.

a) Wie muß die Frequenz gewählt werden, damit sich nur der Wellentyp $n = 1$ ausbreitet (Monomode-Betrieb)?

b) Wie groß ist die Phasengeschwindigkeit dieses Wellentyps?

a) $n=1 \Rightarrow \quad k_{yn} = \frac{n\pi}{d} = \frac{\pi}{d}$; $\omega_{g1} = \frac{\pi}{d} c_0$; $f_1 = \frac{\omega_{g1}}{2\pi}$

$n=2 \Rightarrow \quad k_{yn} = \frac{n\pi}{d} = \frac{\pi}{d}$; $\omega_{g2} = \frac{2\pi}{d} \cdot c_0$; $f_2 = \frac{\omega_{g2}}{2\pi}$

gesucht soll $f_1 \leq f \leq f_2 \quad \omega_{g1} \leq \omega_g \leq \omega_{g2}$

b) $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \quad k_z^2 = k_0^2 - k_y^2$

$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z}$

$v_0 = \lambda_z \cdot f$

Aufgabe A6

Wie groß ist der POYNTINGsche Vektor auf der Oberfläche eines sehr langen Drahtes mit kreisrundem Querschnitt und dem Radius a? Der Draht hat die Leitfähigkeit κ, die Permeabilität μ und durch ihn fließe der Gleichstrom I.

a κ, μ $\longrightarrow I \qquad \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I \qquad H_u = \frac{I}{2\pi a}$

$J = \frac{I}{\pi a^2} = \kappa \cdot E_z \qquad E_z = \frac{I}{\kappa \pi a^2}$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \underbrace{(\vec{e}_z \times \vec{e}_u)}_{= -\vec{e}_s} \frac{I^2}{2 \cdot \kappa \cdot \pi^2 \cdot a^3}$$

$$\vec{S} = -\vec{e}_s \frac{I^2}{2 \cdot \kappa \cdot \pi^2 \cdot a^3}$$

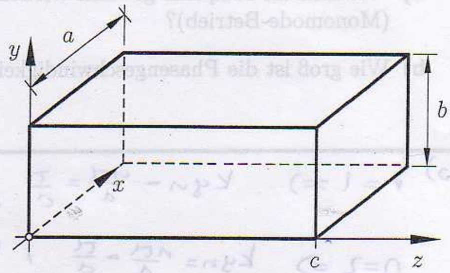
Aufgabe A7

Gegeben ist ein Rechteckhohlraumresonator mit den Abmessungen a, b, c, siehe Bild.

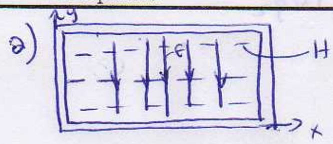
a) Skizziere die elektrischen Feldlinien in der Querschnittsfläche $z = c/2$ für die H_{101}-Resonanz.

b) Skizziere die magnetischen Feldlinien in der Fläche $y = b/2$ für die H_{101}-Resonanz.

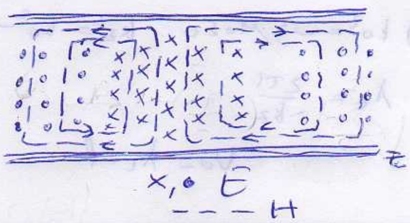
c) Zum Zeitpunkt $t = 0$ erreicht das elektrische Feld im Resonator seinen maximalen Wert E_0. Wie groß ist der maximale Wert des magnetischen Feldes zum selben Zeitpunkt?



a)



b)



$E(x,y,z,t) = E_0(x,y,z)\cdot\cos(\omega t)$

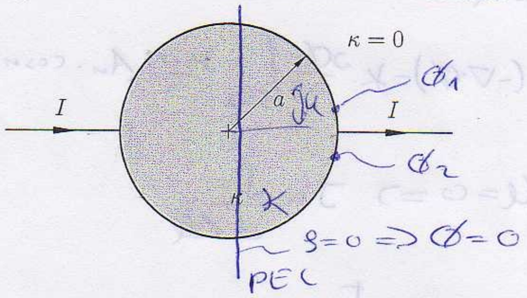
All: $E_x = A_x \cdot \sin\frac{n\pi c}{c} \cdot \cos\frac{n\pi x}{c}$

$\nabla \times H = j\omega\varepsilon E \Rightarrow \frac{d\,\varepsilon E}{dt} = \nabla \times A$

$H(t=0)$

Aufgabe B1

Einer dünnen kreisförmigen Scheibe mit dem Radius a, der Dicke $d \ll a$ und der Leitfähigkeit κ wird an zwei diametral gegenüber liegenden Orten auf dem Rand der Gleichstrom I punktförmig zu- bzw. abgeführt. Bestimme das Potential in der Scheibe.



$-\nabla\phi = \vec{E}_z \qquad \kappa \vec{E}_z = \vec{J}_z \Big|_{z=0,\, z=d} = 0 \Rightarrow k_{z_n} = \frac{n+1}{d}$

$\phi = \left(\underbrace{A_n \left(\frac{\rho}{a}\right)^n}_{\text{inn.}} + \underbrace{B_n \cdot \left(\frac{a}{\rho}\right)^n}_{\text{auß.}}\right) \cdot (C_n \cdot \cos n\varphi + D_n \cdot \sin n\varphi)$

$n = 1, 3, 5, \ldots$ für PEC

$\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow D_n = 0$

$\phi_i = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n \cdot \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cdot \cos n\varphi \qquad \phi_a = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} B_n \left(\frac{a}{\rho}\right)^n \cdot \cos n\varphi$

$\rho = a \Rightarrow B_n = A_n$

$I(\varphi) = i_F(\varphi) \cdot \cos m\varphi$

$\boxed{J_\rho\, dF_\rho = dI}$

$\quad = a \cdot d\varphi \cdot d$

$J = \kappa \cdot E_\rho$

$E = -\nabla \cdot \phi \Big|_{\rho=a} = -\frac{\partial \phi_i}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a} = -n \cdot A_n \cdot \frac{1}{a} \cdot \cos n\varphi$

$\cancel{-\kappa\, n \cdot A_n \cdot \frac{1}{a} \iint \cos n\varphi \cdot a \cdot d\varphi \cdot dz} = \iint dI$

$\cancel{-\kappa\, n \cdot A_n \cdot d \cdot \frac{1}{n} \sin n\varphi}$

$-\kappa\, n \cdot A_n \cdot \frac{1}{a} \cdot \cos n\pi \cdot a \cdot d =$

Punktstromverteilung soll von $\cos n\varphi$ abhängig

d.h. $i_F \cdot \cos n\varphi$

$$-\kappa \cdot E_i = -\kappa(-\nabla \cdot \Phi) = \kappa \left.\frac{\partial \Phi_i}{\partial \varsigma}\right|_{\varsigma=a} = \frac{\kappa \cdot n}{a} A_n \cdot \cos n\varphi = J_F$$

$$\cancel{\int_{-\pi/6}^{\pi/6} i_F \cdot \cos n} \quad \varphi = 0 \Rightarrow J = \frac{I}{d\,\Delta\varphi}$$

$$\frac{\kappa \cdot n}{a} A_n \cdot \cos n\varphi = \frac{I}{d}$$

$$\frac{\kappa \cdot n}{a} A_n \cdot \cos n \cdot 0 = \frac{I}{d}$$

$$\boxed{A_n = \frac{I \cdot a}{\kappa \cdot n \cdot d}}$$

Aufgabe B2

Die Ebenen $x = 0$, $x = a$ sowie $y = 0$ bilden die Wände einer Nut im ansonsten hochpermeablen Gesamtraum. Der Bereich $0 < x < a$, $0 < y < b$ sei in y-Richtung magnetisiert:

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}_y M_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

Bestimme das magnetische Skalarpotential innerhalb der Nut!

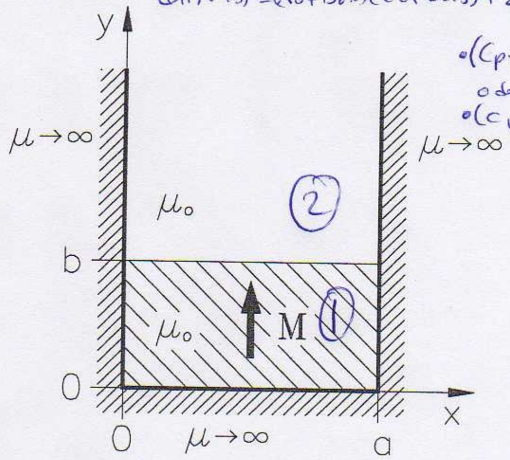
Hinweis: Zeige zunächst die Gültigkeit der Laplacegleichung für das magnetische Skalarpotential.

$$\Phi_m(x,y) = (A_0 + B_0 x)(C_0 + D_0 \cdot y) + \sum_{p\neq 0} (A_p \cdot \cos px + B_p \cdot \sin px)$$

$$\cdot (C_p \cdot \cosh py + D_p \cdot \sinh py)$$

oder

$$\cdot (C_p \cdot e^{py} + D_p \cdot e^{-py})$$



Laplacegleichung $\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla^2 \Phi_m = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\nabla \cdot \vec{B}}_{=0} - \underbrace{\nabla \cdot \vec{M}}_{=0} = 0$ q.e.d.

Potential:

$$\Phi_{m1} = A \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sinh \frac{\pi y}{a} \qquad \Phi_{m2} = B \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{-\frac{\pi}{a}(y-b)}$$

$\underline{y=b}$: $\quad H_t = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad B_n = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$

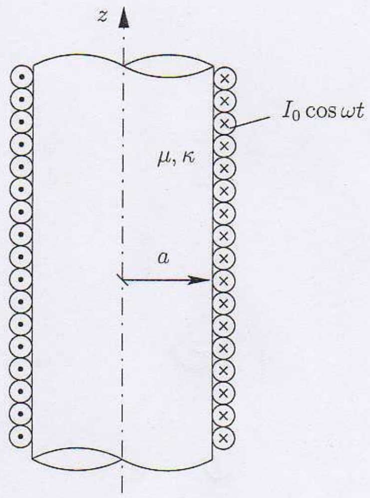
$$H_{x1} = H_{x2} \longrightarrow A \cdot \sinh \frac{\pi b}{a} = B$$

$$B_{y1} = B_{y2} \longrightarrow H_{y1} + M_y = H_{y2} \longrightarrow -\frac{\pi}{a} A \cdot \cosh \frac{\pi b}{a} + M_0 = \frac{\pi}{a} B$$

$$B = \frac{a \cdot M_0}{\pi} \frac{1}{1 + \coth \frac{\pi b}{a}} \qquad A = \frac{a \cdot M_0}{\pi} \frac{1}{\sinh \frac{\pi b}{a} + \cosh \frac{\pi b}{a}}$$

Aufgabe B3

Ein sehr langer leitender Zylinder (Radius a, Länge $l \gg a$, Leitfähigkeit κ) ist außen mit einer dicht gepackten Spule mit N Windungen bewickelt, durch die ein Wechselstrom $i(t) = I_0 \cos \omega t$ fließt.



a) Berechne die magnetische Feldstärke im Zylinder unter Vernachlässigung der Randeffekte und der Verschiebungsströme.

b) Gib eine Näherung des Ergebnisses für sehr kleine Frequenzen an.

Für $\varrho > a$ verschwindet die mag. Feld. $\vec{H}(\varrho) = H(\varrho) \cdot \vec{e_z}$

$$\nabla^2 H_z = \frac{d^2 H_z}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dH_z}{d\varrho} = k^2 H_z \qquad k^2 = j\omega\mu\kappa \quad \text{für } \varrho \leq a$$

Lösungen dieser Differentialgleichung sind modifizierte Besselfunktionen.

$$H_z = A \cdot I_0(k\varrho) + B \cdot K_0(k\varrho) \quad , \quad K_0(0) = \infty \Rightarrow B = 0$$

Randbed.: $\underline{\varrho = a}$:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I \qquad (H_z(\varrho = a) - 0) \cdot l = i_0 \cdot N \Rightarrow A = \frac{i_0 \cdot N}{l} \cdot \frac{1}{I_0(ka)}$$

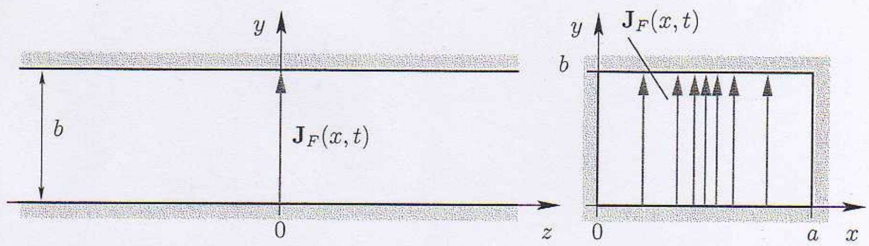
$$H_z = \frac{i_0 \cdot N}{l} \frac{I_0(k\varrho)}{I_0(ka)} \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{J_w} \text{ in } \varphi\text{richtung}$$

$$J_w = -\vec{e_\varphi} \frac{\partial H_z}{\partial \varrho} = -k \frac{i_0 \cdot N}{l} \frac{I_1(k\varrho)}{I_0(ka)} \cdot \vec{e_\varphi}$$

$$k = \frac{1+j}{\delta_s} \quad , \quad \delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu_0}}$$

Aufgabe B4

Gegeben ist ein unendlich langer Rechteckhohlleiter mit den Kantenlängen a und b. In der Ebene $z = 0$ befinde sich zusätzlich ein Flächenstrom $\mathbf{J}_F(x,t) = \mathbf{e}_y\, J_{F0}\, \sin(\pi x/a)\, \cos\omega t$.



a) Welcher Wellentyp wird durch den Flächenstrom angeregt?

b) Welche Differentialgleichung erfüllt der Phasor der elektrischen Feldstärke?

c) Berechne die vom Flächenstrom hervorgerufene elektrische Feldstärke im Rechteckhohlleiter.

a) Der gegebene Flächenstrom wird die H_{10}-Welle mit dem Phasor der elektrischen Feldstärke

$$\vec{E} = \vec{e}_y \cdot E_0 \cdot \sin\frac{\pi x}{a} \cdot e^{-j\cdot k_z \cdot |z|}, \quad k_z^2 + \frac{\pi^2}{a^2} = k_0^2$$

anregen.

b) Der Phasor der elektrischen Feldstärke erfüllt die Helmholtzgleichung

$$\nabla^2 E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -k_0^2 E_y$$

c) Die Amplitude E_0 wird aus der Stetigkeitsbedingungen für die magnetische Feldstärke bestimmt:

$$H_x(z=+0) - H_x(z=-0) = 2\cdot H_x(z=+0) = J_{F0}\cdot \sin\frac{\pi x}{a}$$

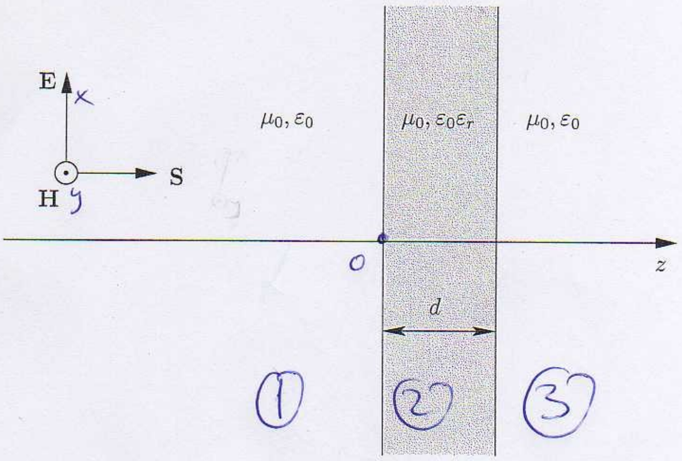
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \rightarrow -j\omega\mu_0 H_x(z=+0) = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\Big|_{z=0}$$

$$= j\cdot k_z \cdot E_0 \cdot \sin\frac{\pi x}{a}$$

$$\boxed{E_0 = -\frac{J_{F0}}{2}\,\frac{\omega\mu_0}{k_z}}$$

Aufgabe B5

Eine harmonische, ebene Welle mit der Kreisfrequenz ω trifft gemäß Abbildung auf eine dielektrische Schicht der Dicke d auf. Das elektrische Feld der einfallenden Welle habe die Amplitude $\hat{E}$.



Bei welchen Wandstärken d verschwindet die Reflexion?

$$E_{1x} = E_0\left(e^{-jk_1 z} - R\,e^{jk_1 z}\right) \qquad H_{1y} = \frac{E_0}{Z_1}\left(e^{-jk_1 z} + R\,e^{jk_1 z}\right)$$

$$E_2 = E_0\left(A_2 \cdot e^{-jk_2 \cdot z} - B_2 \cdot e^{jk_2 \cdot z}\right) \qquad H_2 = \frac{E_0}{Z_2}\left(A_2 \cdot e^{-jk_2 z} + B_2 e^{jk_2 \cdot z}\right)$$

$$E_3 = E_0 A_3\, e^{-jk_1 z} \qquad H_3 = \frac{E_0}{Z_1} A_3 \cdot e^{-jk_1 \cdot z}$$

$$k_1^2 = k_3^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \qquad Z_1 = Z_3 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \qquad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} \qquad k_2^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0$$

$\underline{z=0}$:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow 1 = A_2 - B_2 \; ; \quad H_1 = H_2 \Rightarrow Z_2 = Z_1(A_2 + B_2)$$

$$A \quad A_2 = \frac{Z_1 + Z_2}{2 \cdot Z_1} \; ; \quad B_2 = \frac{Z_2 - Z_1}{2 \cdot Z_1}$$

$\underline{z=-d}$:

$$A_2\, e^{-jk_2 d} - B_2 \cdot e^{jk_2 d} = A_3 \cdot e^{-jk_1 d} \; ; \quad \frac{Z_1}{Z_2}\left(A_2 \cdot e^{-jk_2 \cdot d} + B\, e^{jk_2 d}\right) = A_3 \cdot e^{-jk_1 d}$$

$$\frac{Z_1 + Z_2}{2Z_1} \cdot e^{-jk_2 \cdot d} - \frac{Z_2 - Z_1}{2Z_1}\, e^{jk_2 d} = \frac{Z_1}{Z_2}\left(\frac{Z_1 + Z_2}{2 \cdot Z_1} e^{-jk_2 \cdot d} + \frac{Z_2 - Z_1}{2 \cdot Z_1}\, e^{jk_2 \cdot d}\right)$$

$$\frac{Z_1 + Z_2}{2Z_1}\, e^{-jk_2 d}\left(1 - \frac{Z_1}{Z_2}\right) = \frac{Z_2 - Z_1}{2 \cdot Z_1}\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) e^{jk_2 d}$$

$$e^{-jk_2 d} = e^{jk_2 d} \Rightarrow \underbrace{e^{jk_2 d} - e^{-jk_2 d}}_{2j \cdot \sin(k_2 \cdot d)} = 0 \qquad k_2 \cdot d = n \cdot \pi$$

$$\boxed{d = \frac{n\pi}{k_2}}$$