

Lösung der Aufgabe 1

Es liegt ein hinsichtlich der Koordinate z ebenes Randwertproblem in kartesischen Koordinaten vor. Für das Potential, welches die zweidimensionale *Laplacegleichung*

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

zu erfüllen hat, kann nach *Bernoulli* ein Produkt von Funktionen, die jeweils nur von einer Koordinate abhängen, angesetzt werden. Auf diese Weise wird die Lösung der *partiellen* Differentialgleichung (1) auf die Lösung zweier *gewöhnlicher* Differentialgleichungen zurückgeführt. Dabei ist hier aufgrund der Potentialvorgabe $\phi(x)$ die Separation so vorzunehmen, daß orthogonale Funktionen der Koordinate x entstehen. Da das elektrische Feld von der Koordinate z unabhängig ist, wird

$$k_z = 0 \quad \rightarrow \quad k_y = j k_x$$

und wir erhalten als allgemeinsten Potentialansatz

$$\boxed{\begin{aligned} \phi(x, y) &= (A_0 + B_0x) \cdot (C_0 + D_0y) \\ &+ \sum_{k_x \neq 0} [A(k_x) \cos k_x x + B(k_x) \sin k_x x] \cdot [C(k_x) \cosh k_x y + D(k_x) \sinh k_x y] \end{aligned}} \tag{2}$$

Hinweis: Die Separationskonstanten k_x werden bei unseren Aufgaben in der Regel diskrete Werte annehmen, über die in der angegebenen Weise summiert wird. Nehmen die Separationskonstanten dagegen beliebige Werte an, so ist über den gesamten Wertebereich zu integrieren.

Bestimmung der Konstanten

Wir beginnen mit den homogenen Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \phi(0, y) = 0 &\quad \rightarrow \quad \boxed{A_0 = A(k_x) = 0} \\ \phi(a, y) = 0 &\quad \rightarrow \quad \boxed{B_0 = 0} \quad , \quad \sin k_x a = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{k_x = \frac{n\pi}{a}} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \phi(x, 0) = 0 &\quad \rightarrow \quad \boxed{C(k_x) = 0} \end{aligned}$$

Es folgt die Berücksichtigung der Potentialvorgabe:

$$\phi(x, b) = \phi_0 \cos \frac{\pi x}{a} \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} = \phi_0 \cos \frac{\pi x}{a} \tag{3}$$

Um die an dieser Stelle noch unbekanntenen Konstanten E_n eliminieren zu können, werden beide Seiten der Gleichung (3) mit der orthogonalen Funktion $\sin \frac{m\pi x}{a}$ multipliziert und anschließend über den Orthogonalitätsbereich $0 \leq x \leq a$ integriert. Diesen Vorgang nennt man schlechthin *Orthogonalentwicklung*.

$$\phi_0 \int_0^a \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh \frac{n\pi b}{a} \underbrace{\int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx}_{\frac{a}{2} \delta_m^n}$$

Der Witz dabei ist, daß durch das Auftreten des Kroneckersymbols δ_m^n lediglich das Glied $m = n$ in der Summe verbleibt und wir daher in die Lage versetzt werden, die Gleichung nach der Konstanten E_m aufzulösen. Da der Index m eine beliebige natürliche Zahl sein kann, liefert uns die beschriebene Prozedur tatsächlich alle unbekanntenen Konstanten E_n . Mit dem Bronstein-Integral Nr. 408 wird

$$\int_0^a \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{a}{2\pi} \left[\frac{1 - \cos[(m+1)\pi]}{m+1} + \frac{1 - \cos[(m-1)\pi]}{m-1} \right]$$

und wegen

$$\cos[(m+1)\pi] = \cos[(m-1)\pi] = (-1)^{m+1}$$

schließlich

$$\int_0^a \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \text{ ungerade} \\ \frac{2a}{\pi} \frac{m}{m^2-1} & \text{für } m \text{ gerade} \end{cases} .$$

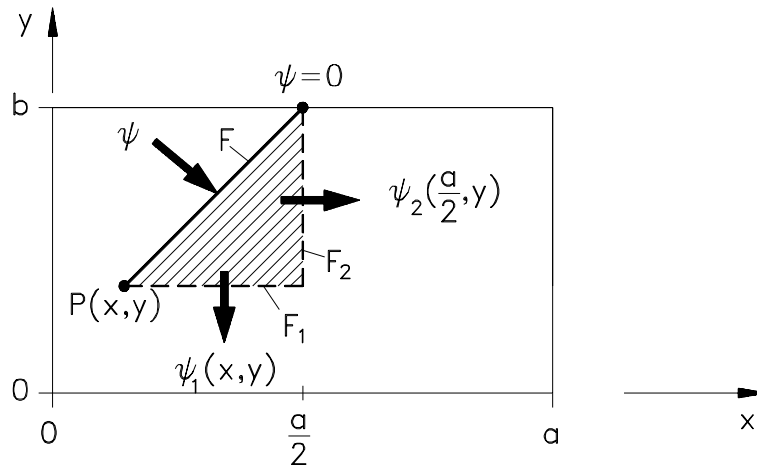
Resultierend stellt sich im Rechteckzylinder also das Potential

$$\boxed{\frac{\phi(x, y)}{\phi_0} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} \frac{\sinh \frac{n\pi y}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}} \quad (4)$$

ein.

Berechnung der elektrischen Feldlinien

Aufgrund der symmetrischen Geometrie in Verbindung mit einer zur Ebene $x = \frac{a}{2}$ schiefssymmetrischen Potentialvorgabe wird diese Ebene zur Äquipotentialfläche $\phi = 0$ und es genügt die Betrachtung des Bereiches $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$.



Betrachten wir einmal den variablen Punkt $P(x, y)$ im oberen Bild. Dann kann man doch sagen, daß der elektrische Fluß, der eine beliebige Verbindungsfläche F zwischen den Punkten $P(x, y)$ und $(x = \frac{a}{2}, y = b)$ durchsetzt, sich bei Variation des Punktes $P(x, y)$ entlang einer Feldlinie nicht ändert. Umgekehrt bestimmen also die Konturlinien des elektrischen Flusses durch F eindeutig den Verlauf der elektrischen Feldlinien. Da aufgrund der Ladungsfreiheit des im Bild schraffierten Gebietes durch dessen Hüllfläche kein Nettofluß hindurchtreten darf, lautet die Feldliniengleichung

$$\psi(x, y) = \psi_1(x, y) + \psi_2\left(\frac{a}{2}, y\right) = \text{const.} \quad (5)$$

Aus dem schon bekannten Potentialverlauf erhalten wir den elektrischen Fluß durch Integration:

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= \varepsilon \int_x^{a/2} \frac{\partial \phi}{\partial y} dx = \varepsilon \frac{4}{\pi} \phi_0 \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1} \frac{\cosh \frac{n\pi y}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \left[\cos \frac{n\pi x}{a} - \cos \frac{n\pi}{2} \right] \\ \psi_2\left(\frac{a}{2}, y\right) &= -\varepsilon \int_y^b \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=\frac{a}{2}} dy = \varepsilon \frac{4}{\pi} \phi_0 \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1} \frac{\cosh \frac{n\pi y}{a} - \cosh \frac{n\pi b}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \cos \frac{n\pi}{2} \\ \rightarrow \quad \psi(x, y) &= \varepsilon \frac{4}{\pi} \phi_0 \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1} \left[\frac{\cosh \frac{n\pi y}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a} - (-1)^{\frac{n}{2}} \coth \frac{n\pi b}{a} \right] \quad (6) \end{aligned}$$

b) Im Aufgabenteil a) haben wir gesehen, daß zur Anpassung der allgemeinen Fourier-Sinusreihe des Lösungsansatzes an die kosinusförmige Potentialvorgabe eine Orthogonalentwicklung erforderlich war. Wir betrachten jetzt eine sinusförmige Potentialvorgabe,

die also, anders ausgedrückt, in Form der Eigenfunktion $n = 1$ unseres Problems gegeben ist. Damit ist klar, daß in der allgemeinen Lösungssumme tatsächlich nur das Glied $n = 1$ zur Anpassung an die Potentialvorgabe zu berücksichtigen ist, und die unbekannte Konstante E_1 kann sofort bestimmt werden. Ohne Rechnung ergibt sich dann für das Potential das Ergebnis

$$\boxed{\frac{\phi(x, y)}{\phi_0} = \frac{\sinh \frac{\pi y}{a}}{\sinh \frac{\pi b}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}} \quad , \quad (7)$$

welches, wie man unschwer erkennt, alle Randbedingungen erfüllt. Ebenso einfach gestaltet sich dann auch die Flußberechnung, bei der diesmal zu berücksichtigen ist, daß die Linie $x = \frac{a}{2}$ zur Feldlinie wird, so daß ψ_2 dort überall verschwindet. Es ergibt sich dann wieder ohne Rechnung das Resultat

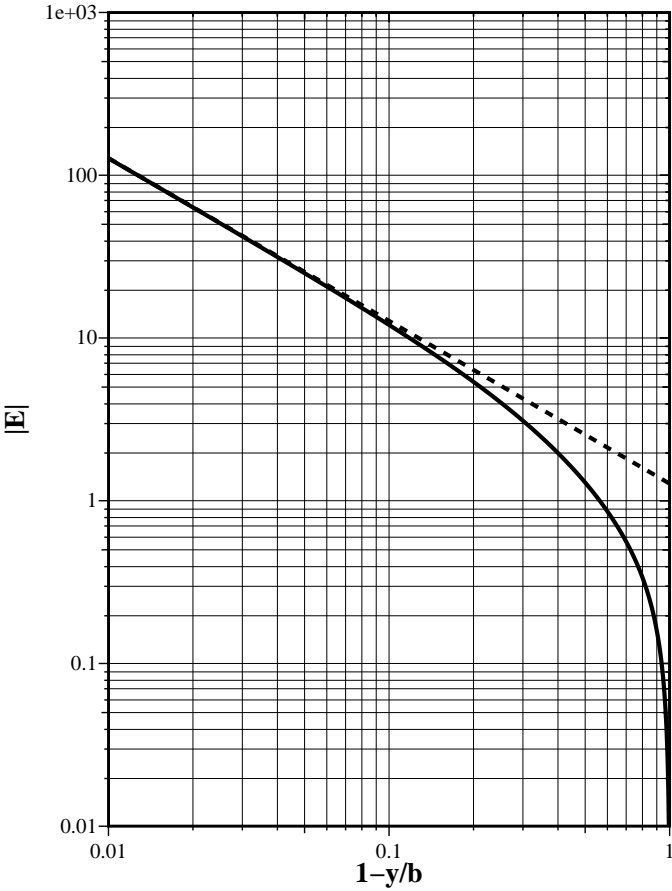
$$\boxed{\psi(x, y) = \varepsilon \phi_0 \frac{\cosh \frac{\pi y}{a}}{\sinh \frac{\pi b}{a}} \cos \frac{\pi x}{a}} \quad , \quad (8)$$

Die folgenden Bilder veranschaulichen die Feldausbildung in beiden betrachteten Fällen. Bemerkenswert ist die Wirbelbildung der elektrischen Feldlinien in den oberen Ecken des Zylinders bei kosinusförmiger Potentialvorgabe. Tatsächlich sieht das Feld dort eher magnetisch aus, oder genauer wie das magnetische Feld eines in der Ecke angebrachten Linienstromes. Da ein solches Feld ja auch stets rotations- und divergenzfrei ist (mit Ausnahme am Ort des Linienstromes natürlich), können wir das elektrische Feld in unmittelbarer Umgebung der linken oberen Ecke folgendermaßen approximieren:

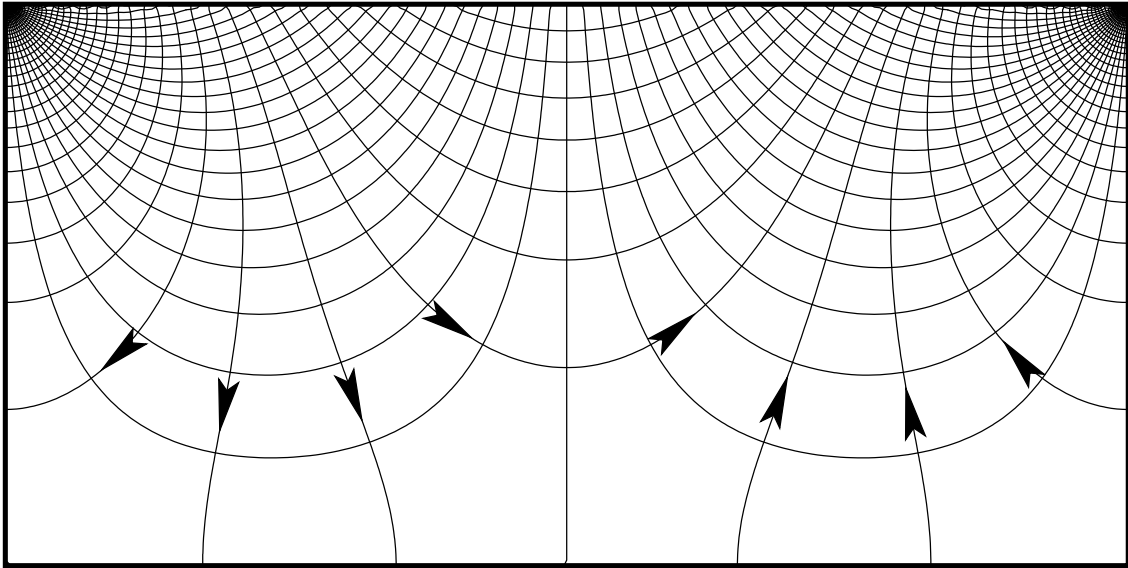
$$\mathbf{E} \approx \mathbf{e}_\varphi \frac{C}{\varrho} \quad , \quad \varrho = \sqrt{x^2 + (y - b)^2} \quad .$$

Die Konstante C erhält man schließlich aus dem Wegintegral entlang einer Feldlinie

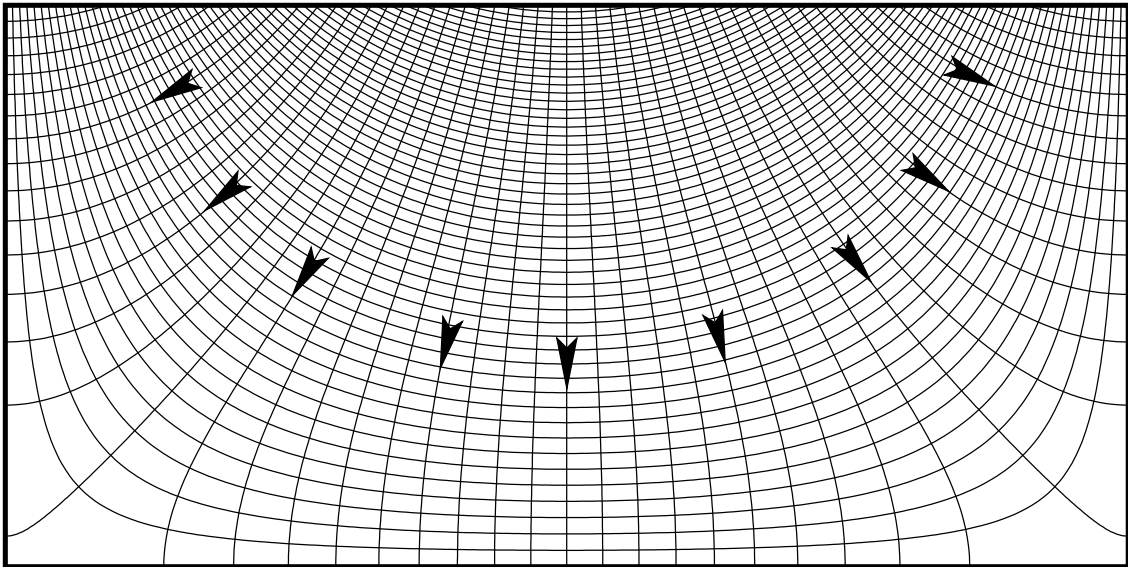
$$\phi_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} E(\varrho) \varrho \, d\varphi \quad \rightarrow \quad C = \phi_0 \frac{2}{\pi} \quad .$$



Das elektrische Feld entlang der y -Achse (der gestrichelte Verlauf zeigt die Approximation)



Feldlinien und Äquipotentiallinien bei kosinusförmiger Potentialvorgabe



Feldlinien und Äquipotentiallinien bei sinusförmiger Potentialvorgabe

Lösung der Hausaufgabe

Lösungsansätze:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= A \sin \frac{2\pi x}{a} \sinh \frac{2\pi y}{a} e^{-2\pi h/a} \quad \text{für } 0 \leq y \leq h \\ \phi_2 &= A \sin \frac{2\pi x}{a} e^{-2\pi y/a} \sinh \frac{2\pi h}{a} \quad \text{für } y \geq h\end{aligned}$$

Dabei wurde bereits die Stetigkeit des Potentials in der Ebene $y = h$ berücksichtigt. Außerdem kann aufgrund der speziellen Flächenladung nur das Glied $n = 2$ der allgemeinen Lösungssumme auftreten. Die Ebene $y = 0$ ist schließlich aus Symmetriegründen eine Äquipotentialfläche $\phi = 0$.

Stetigkeitsbedingung:

$$D_{y2} - D_{y1} = q_{F0} \sin \frac{2\pi x}{a} = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)_{y=h}$$

$$A \frac{2\pi}{a} \underbrace{\left\{ \cosh \frac{2\pi h}{a} + \sinh \frac{2\pi h}{a} \right\}}_{e^{2\pi h/a}} e^{-2\pi h/a} = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{A = \frac{q_{F0} a}{2\pi \varepsilon_0}}$$