Lösung der Aufgabe 1

a) Die bewegte Flächenladung läßt sich zunächst in der komplexen Form

$$q_F(z,t) = \mathrm{Re}\left\{q_{F0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z(z-v_0 t)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{q_{F0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)}\right\} \tag{1}$$

schreiben, aus der wir den *Phasor*

$$q_F(z) = q_{F0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \quad , \quad k_z = \frac{\omega}{v_0} \tag{2}$$

ablesen können. Auf eine gesonderte Kennzeichnung komplexer Feldgrößen, wie z.B. durch eine übergesetzte Tilde, sei hier und im folgenden verzichtet. D.h., von nun ab sind alle Feldgrößen als komplexe Zeiger aufzufassen. Die bewegte Flächenladung ist mit einer Flächenstromdichte

$$\mathbf{J}_F(z) = v_0 q_F(z)\,\mathbf{e}_z \tag{3}$$

verbunden. Die magnetische Feldstärke der zweidimensionalen Anordnung wird lediglich eine x-Komponente aufweisen, die Lösung der HELMHOLTZgleichung

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = -k^2 H_x \quad , \quad k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu \tag{4}$$

ist. Aus Symmetriegründen beschränken wir uns im folgenden auf den Bereich $y \geq 0$. Der Lösungsansatz

$$H_x = \begin{cases} (A\,\cos k_{y1}y + B\,\sin k_{y1}y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} & \text{für} \quad 0 \leq y \leq a \\ C\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{y2}(y-a)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} & \text{für} \quad y \geq a \end{cases} \tag{5}$$

mit

$$k_{y1} = \sqrt{k^2 - k_z^2} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - c^2/v_0^2} = \mathrm{j}\,\frac{\omega}{c}\sqrt{c^2/v_0^2 - 1} \tag{6}$$

$$k_{y2} = \sqrt{\varepsilon_r k^2 - k_z^2} = \frac{\omega}{c}\begin{cases} \sqrt{\varepsilon_r - c^2/v_0^2} & \text{für} \quad v_0 > c/\sqrt{\varepsilon_r} \\ -\mathrm{j}\sqrt{c^2/v_0^2 - \varepsilon_r} & \text{für} \quad v_0 < c/\sqrt{\varepsilon_r} \end{cases} \tag{7}$$

garantiert, daß das Magnetfeld entweder mit steigenden Entfernungen y abklingt oder eine Welle in positive y-Richtung darstellt. Schon jetzt sehen wir: überschreitet die Geschwindigkeit v_0 der Flächenladung die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im Dielektrikum $c/\sqrt{\varepsilon_r}$, so tritt Strahlung, die sogenannte *Cerenkov-Strahlung* auf.
Ein Umlaufintegral in der Ebene $y = 0$ liefert zunächst die Konstante A

$$-2\,H_x(y = +0) = J_F \quad \rightarrow \quad A = -v_0 q_{F0}/2\ . \tag{8}$$

In der Ebene $y = a$ ist die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ zu fordern

$$\begin{aligned} &H_x(y = a - 0) = H_x(y = a + 0) \\ &E_z(y = a - 0) = E_z(y = a + 0) \quad \rightarrow \quad \left.\frac{\partial H_x}{\partial y}\right|_{y=a-0} = \frac{1}{\varepsilon_r} \left.\frac{\partial H_x}{\partial y}\right|_{y=a+0} . \end{aligned} \tag{9}$$

Dies führt auf die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} &A \cos k_{y1}a + B \sin k_{y1}a = C \\ &k_{y1} \left(-A \sin k_{y1}a + B \cos k_{y1}a\right) = -\mathrm{j}\, k_{y2} \frac{1}{\varepsilon_r} C \end{aligned} \tag{10}$$

Daraus lassen sich leicht die Konstante B und C eliminieren

$$\begin{aligned} B &= -\frac{v_0 q_{F0}}{2} \frac{k_{y1}\varepsilon_r \sin k_{y1}a - \mathrm{j}k_{y2} \cos k_{y1}a}{k_{y1}\varepsilon_r \cos k_{y1}a + \mathrm{j}k_{y2} \sin k_{y1}a} \\ C &= -\frac{v_0 q_{F0}}{2} \frac{k_{y1}\varepsilon_r}{k_{y1}\varepsilon_r \cos k_{y1}a + \mathrm{j}k_{y2} \sin k_{y1}a} \end{aligned} \tag{11}$$

b) Winkel der Wellennormalen

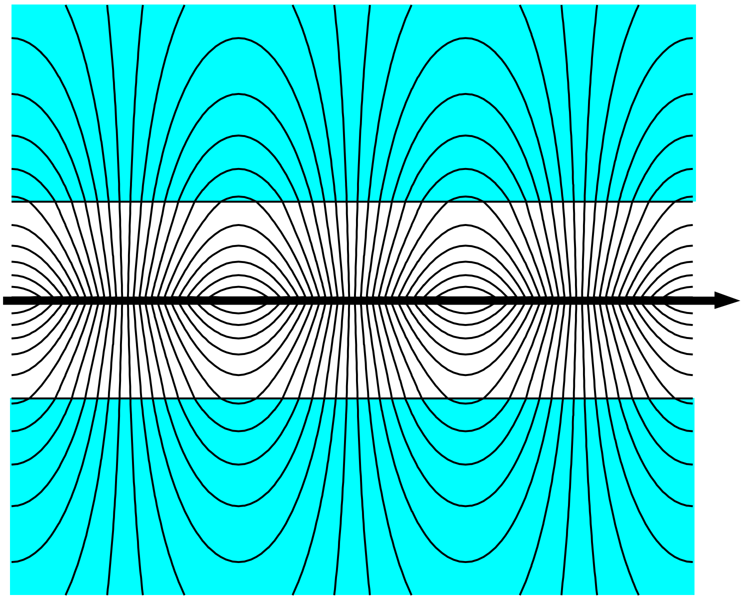
Es sei $\mathbf{n}$ der Normalenvektor auf einer Wellenfront. Dann gilt

$$\cos\vartheta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z = \frac{k_{y2}\mathbf{e}_y + k_z\mathbf{e}_z}{\sqrt{k_{y2}^2 + k_z^2}} \cdot \mathbf{e}_z \tag{12}$$

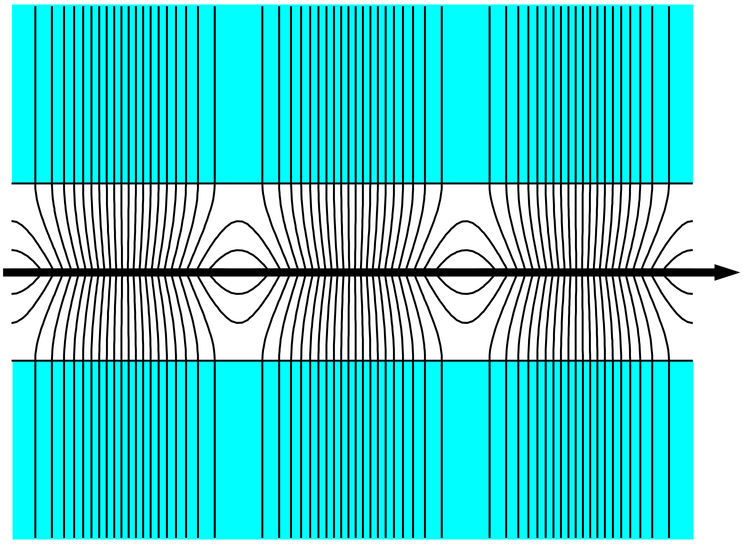
und damit

$$\boxed{\cos\vartheta = \frac{c/\sqrt{\varepsilon_r}}{v_0}} . \tag{13}$$

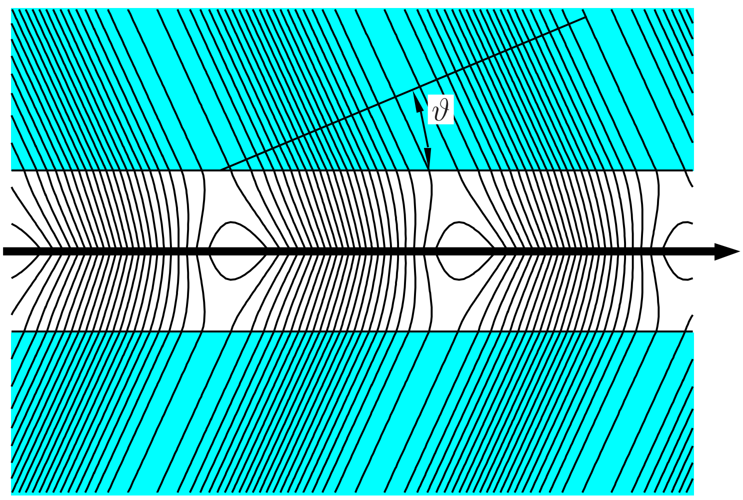
Die folgenden Bilder zeigen den Verlauf der Verschiebungsstromlinien für den Fall $\varepsilon_r = 1.5$, $ka = 1$ und verschiedene Geschwindigkeiten der Flächenladung.



$v_0 = 0.9\, c/\sqrt{\varepsilon_r}$



$v_0 = 1.0\, c/\sqrt{\varepsilon_r}$



$v_0 = 1.1\, c/\sqrt{\varepsilon_r}$

c) Wir betrachten nun anstelle der Flächenladung eine bewegte Linienladung q_L im homogenen Gesamtraum mit der relativen Dielektrizitätskonstanten ε_r. In diesem Fall wird sicherlich keine monochromatische Welle abgestrahlt, weshalb sich eine FOURIERtransformation anbietet. Wir gehen aus von der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \ . \tag{14}$$

Durch FOURIERtransformation

$$\tilde{H}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} H_x \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \, \mathrm{d}t \quad , \quad H_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}_x \, \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\omega t} \, \mathrm{d}\omega \tag{15}$$

geht die Gleichung über in die HELMHOLTZgleichung

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{H}_x}{\partial z^2} = -\omega^2 \varepsilon\mu \tilde{H}_x \ , \tag{16}$$

die wir wie vorhin mit dem Ansatz

$$\tilde{H}_x = A \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_y y + k_z z)} \quad , \quad k_y^2 + k_z^2 = k^2 \varepsilon_r \quad , \quad k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \tag{17}$$

zu lösen versuchen. Der Linienladung entspricht eine DIRACförmige Flächenladung

$$q_F(z,t) = q_L \delta(z - v_0 t) \ . \tag{18}$$

Wegen

$$\delta(z - v_0 t) \ \circ\!\!-\!\!\bullet \ \frac{1}{v_0} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \quad , \quad k_z = \frac{\omega}{v_0} \tag{19}$$

stellt sich im Bildbereich der FOURIERtransformation die Flächenstromdichte

$$\tilde{J}_F(z,\omega) = q_L \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{20}$$

ein. Mit der ebenfalls vorhin schon benutzten Randbedingung

$$-2\tilde{H}_x(y=0) = \tilde{J}_F \tag{21}$$

ergibt sich die Konstante A zu

$$A = -q_L/2 \tag{22}$$

und das Magnetfeld lautet

$$H_x(y,z,t) = -\frac{q_L}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega t - \mathrm{j}k_y y - \mathrm{j}\omega z/v_0} \, \mathrm{d}\omega \tag{23}$$

mit

$$k_y = \begin{cases} \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r - c^2/v_0^2} & \text{für} \quad v_0 > c/\sqrt{\varepsilon_r} \\ -\mathrm{j}\,\frac{|\omega|}{c}\sqrt{c^2/v_0^2 - \varepsilon_r} & \text{für} \quad v_0 < c/\sqrt{\varepsilon_r} \end{cases} \ . \tag{24}$$

Man beachte die Betragszeichen bei der Kreisfrequenz ω, die notwendig werden, da auch über *negative* Frequenzen integriert wird.

Lösung des Integrals für $v_0 > c/\sqrt{\varepsilon_r}$

Da sich ω ausklammern läßt, ergibt sich hier sofort die Integraldarstellung der DIRACschen Deltafunktion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega\left(t-\sqrt{\varepsilon_r - c^2/v_0^2}\; y/c - z/v_0\right)}\,\mathrm{d}\omega = 2\pi\delta\left(t - \sqrt{\varepsilon_r - c^2/v_0^2}\; y/c - z/v_0\right) \tag{25}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{H_x(y,z,t) = -\frac{q_L}{2}\,\delta\left(t - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{c/\sqrt{\varepsilon_r}}\right)} \quad , \quad \mathbf{n} = \sin\vartheta\,\mathbf{e}_y + \cos\vartheta\,\mathbf{e}_z \; . \tag{26}$$

Es breitet sich eine sogenannte „Schockwelle“ unter dem Winkel ϑ aus.

Lösung des Integrals für $v_0 < c/\sqrt{\varepsilon_r}$

Hier muß das Integral wegen der Betragszeichen aufgespalten werden

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega(t-z/v_0)-|\omega|\sqrt{c^2/v_0^2-\varepsilon_r}\; y/c}\,\mathrm{d}\omega = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega\tau-|\omega|\eta}\,\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega\tau+\omega\eta}\,\mathrm{d}\omega + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\omega\tau-\omega\eta}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\mathrm{j}\tau+\eta} + \frac{1}{-\mathrm{j}\tau+\eta} = \frac{2\eta}{\eta^2+\tau^2} = \\
&= 2v_0\,\frac{y\sqrt{1-\beta^2}}{y^2(1-\beta^2)+(z-v_0t)^2} \quad , \quad \beta = \frac{v_0}{c/\sqrt{\varepsilon_r}} \; .
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{H_x(y,z,t) = -\frac{\gamma q_L v_0}{2\pi}\,\frac{y}{y^2+\gamma^2(z-v_0t)^2}} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \; . \tag{28}$$

Lösung der Hausaufgabe

• Feldkomponenten für x–unabhängige E–Wellen:

$$H_x = \frac{\partial A_0^E}{\partial y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \quad , \quad E_z = \frac{K^2}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}A_0^E\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \quad , \quad K^2 = k_y^2 = k^2 - k_z^2$$

Weil H_x schiefsymmetrisch ist und $E_z\big(y = e + d\big) = 0$, lauten die Potentialansätze in den beiden Raumteilen:

$$A_{0,1}^E = B\cos k_{y1}y \qquad \text{für} \quad 0 \le y \le d$$

$$A_{0,2}^E = C\sin k_{y2}\,(y-e-d) \qquad \text{für} \quad d \le y \le e+d$$

Die Stetigkeitsbedingungen für $y = d$ sind:

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad H_{x1} = H_{x2} && \longrightarrow && Bk_{y1} \sin k_{y1} d && = -Ck_{y2} \cos k_{y2} e \\
&(ii) \quad E_{z1} = E_{z2} && \longrightarrow && \frac{k_{y1}^2}{\varepsilon_r} B \cos k_{y1} d && = -k_{y2}^2 C \sin k_{y2} e
\end{aligned}
$$

Die Koeffizientendeterminante des homogenen Gleichungssystems muß verschwinden:

$$
\begin{vmatrix} \sin k_{y1} d & \cos k_{y2} e \\ k_{y1} \cos k_{y1} d & k_{y2} \varepsilon_r \sin k_{y2} e \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \varepsilon_r k_{y2} \tan k_{y2} e - k_{y1} \cot k_{y1} d = 0
$$

$$
\text{mit} \quad k_{y1}^2 = \omega^2 \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0 - k_z^2 \quad , \quad k_{y2}^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - k_z^2
$$