

Lösung der Aufgabe 1

Feldansätze

Aus der Vorlesung sollte eigentlich bekannt sein, daß das elektrische Feld einer p-polarisierten Welle in der Parallelplattenleitung die folgende Ortsabhängigkeit aufweist

$$E_y \sim \cos \frac{n\pi y}{d} e^{\pm jk_z z} \quad , \quad E_z \sim \sin \frac{n\pi y}{d} e^{\pm jk_z z} \quad , \quad k_z^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2$$

Wegen $\mathbf{H} \sim \nabla \times \mathbf{E}$ folgt für die Ortsabhängigkeit des magnetischen Feldes

$$H_x \sim \cos \frac{n\pi y}{d} e^{\pm jk_z z} \quad .$$

Wir machen im folgenden einen Stehwellenansatz im Raum 1, wobei zwei mögliche Symmetrien bezüglich $z = 0$ zu berücksichtigen sind, und einen nach außen hin abklingenden Feldansatz im Raum 2, von dem wir wissen, daß eine negativ imaginäre Ausbreitungskonstante $k_z^{(2)}$ erforderlich ist:

$$\begin{aligned} H_x^{(1)} &= A \cos \frac{n\pi y}{d} \left\{ \begin{array}{l} \cos(k_z^{(1)} z) / \cos(k_z^{(1)} a) \\ \sin(k_z^{(1)} z) / \sin(k_z^{(1)} a) \end{array} \right\} \\ H_x^{(2)} &= B \cos \frac{n\pi y}{d} e^{-jk_z^{(2)} |z-a|} \end{aligned} \quad (1)$$

mit den Ausbreitungskonstanten

$$k_z^{(1)2} = \varepsilon_r k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \quad , \quad k_z^{(2)2} = k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \quad . \quad (2)$$

Das tangentielle elektrische Feld errechnet sich unter Verwendung von

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \varepsilon \mathbf{E} \quad \rightarrow \quad E_y = \frac{1}{j\omega \varepsilon} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

zu

$$\begin{aligned} E_y^{(1)} &= \frac{k_z^{(1)}}{j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r} A \cos \frac{n\pi y}{d} \left\{ \begin{array}{l} -\sin(k_z^{(1)} z) / \cos(k_z^{(1)} a) \\ \cos(k_z^{(1)} z) / \sin(k_z^{(1)} a) \end{array} \right\} \\ E_y^{(2)} &= \frac{-jk_z^{(2)}}{j\omega \varepsilon_0} B \cos \frac{n\pi y}{d} e^{-jk_z^{(2)} |z-a|} \quad . \end{aligned} \quad (3)$$

Stetigkeitsforderungen

An der Trennfläche $z = a$ muß gelten

$$H_x^{(1)}(y, z = a) = H_x^{(2)}(y, z = a) \quad , \quad E_y^{(1)}(y, z = a) = E_y^{(2)}(y, z = a) \quad . \quad (4)$$

Aufgrund der äußerst geschickten Normierung auf den Abstand a wird das Magnetfeld bei Gleichheit der Konstanten $A = B$ stetig, so daß das elektrische Feld bei Erfüllung der transzendenten Eigenwertgleichung

$$\frac{k_z^{(1)}}{\varepsilon_r} \left\{ \begin{array}{c} -\tan(k_z^{(1)} a) \\ \cot(k_z^{(1)} a) \end{array} \right\} = -jk_z^{(2)} \quad (5)$$

stetig wird. Es können an dieser Stelle zwei Aussagen über die Ausbreitungskonstanten gemacht werden:

- $k_z^{(2)}$ ist negativ imaginär, um ein "Herauslecken" der Wellen aus dem Resonator zu vermeiden.
- $k_z^{(1)}$ ist dann auf jeden Fall reell, da sonst die Eigenwertgleichung unmöglich befriedigt werden kann.

Zweckmäßigerweise rechnen wir mit einer normierten Frequenz weiter

$$\text{normierte Frequenz: } \lambda = \frac{k_0 d}{n\pi}, \quad (6)$$

für die aufgrund der oben getroffenen Feststellung der Wertebereich

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} < \lambda < 1 \quad (7)$$

vorzusehen ist. Die Eigenwertgleichung nimmt dann die Gestalt

$$\boxed{\sqrt{1 - \lambda^2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_r \lambda^2 - 1}}{\varepsilon_r} \left\{ \begin{array}{c} \tan\left(n\pi \frac{a}{d} \sqrt{\varepsilon_r \lambda^2 - 1}\right) \\ -\cot\left(n\pi \frac{a}{d} \sqrt{\varepsilon_r \lambda^2 - 1}\right) \end{array} \right\}} \quad (8)$$

an. Bezeichnet man die linke Seite mit $f_1(\lambda)$ und die rechte Seite mit $f_2(\lambda)$ so liegt eine grafische Lösung nahe: Die gesuchten Resonanzfrequenzen findet man als Schnittpunkte der Kurven $f_2(\lambda)$ mit dem Kreis $f_1^2 + \lambda^2 = 1$. Das Bild zeigt für ein gewähltes Beispiel die Ausbildung von 4 Schwingungsmoden. Davon haben zwei ein geradsymmetrisches magnetisches Feld (λ_1, λ_3) und die anderen beiden ein schiefsymmetrisches (λ_2, λ_4), was man auch aus den Feldstärkeprofilen in der Ebene $y = 0$ und aus den Feldbildern ersehen kann.

Verschiebungsstromlinien

Aus der Differentialgleichung für Feldlinien

$$\mathbf{dr} \times j\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{dr} \times \nabla \times \mathbf{H} = 0$$

folgt nach Anwendung der Backminuszapp-Regel

$$\underbrace{\nabla(\mathbf{dr} \cdot \mathbf{H})}_{=0} - (\mathbf{dr} \cdot \nabla) \mathbf{H} = -d\mathbf{H} = 0$$

und damit die Aussage

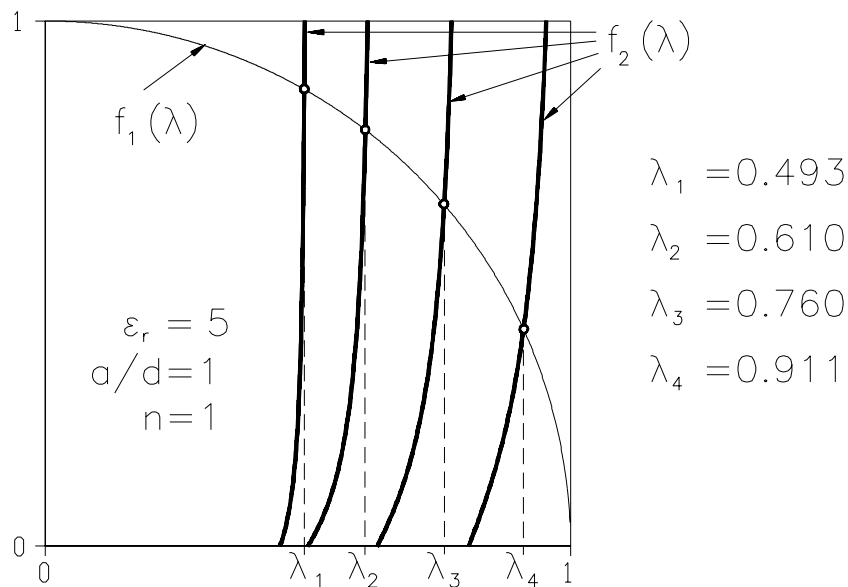
$$\boxed{\operatorname{Re}\{H_x e^{j\omega t}\} = \text{const.}} \quad . \quad (9)$$

Numerische Auswertung

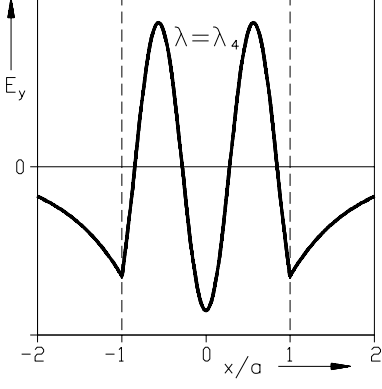
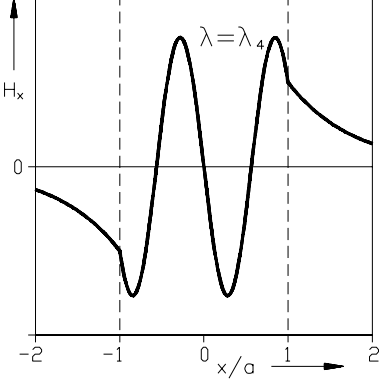
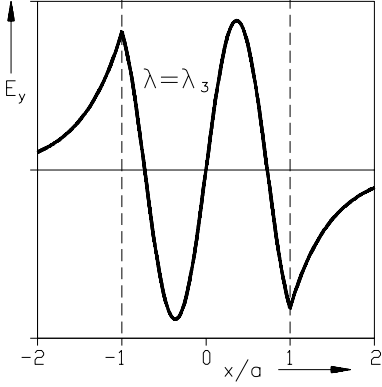
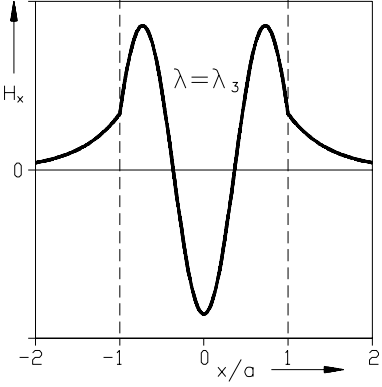
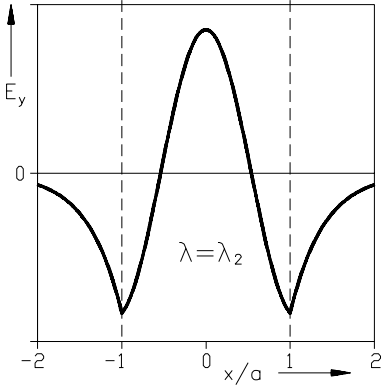
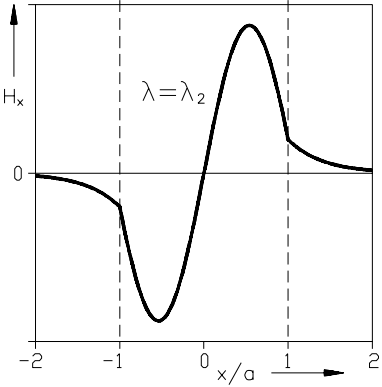
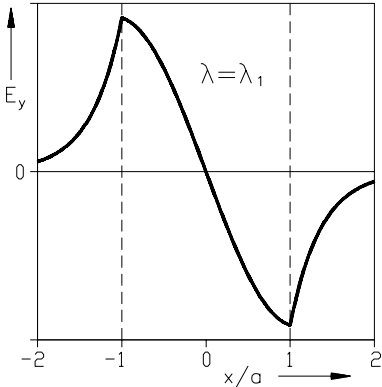
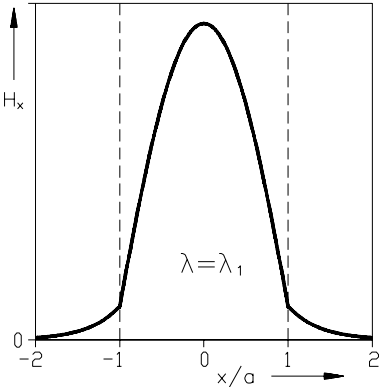
Zur Illustration der gewonnenen Ergebnisse wurde folgende Anordnung zugrundegelegt:

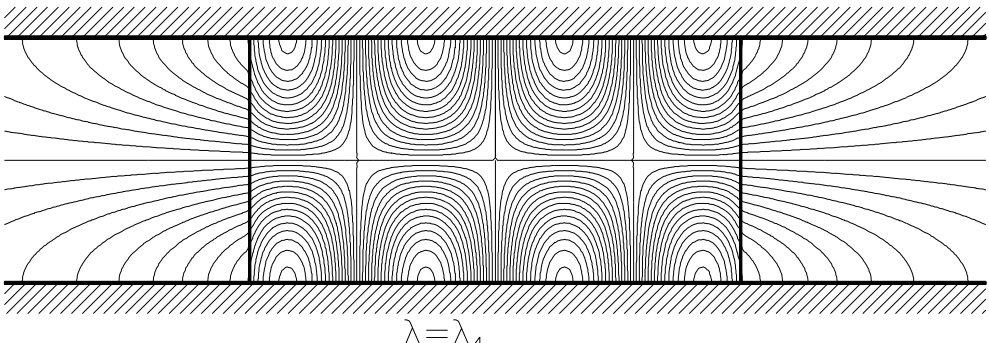
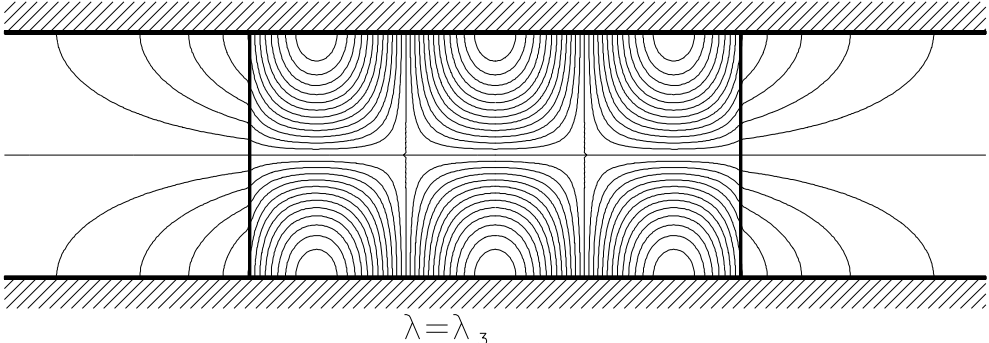
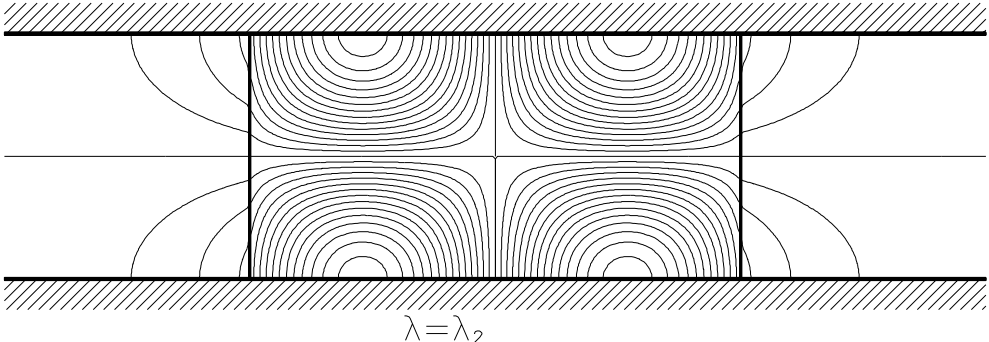
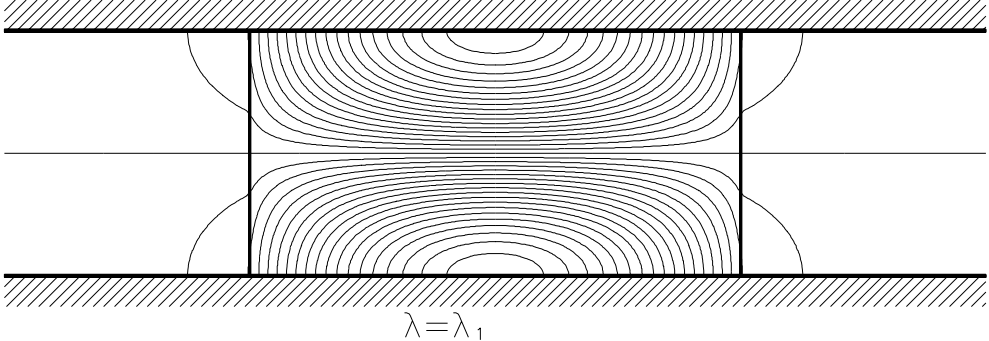
$$\varepsilon_r = 5 \quad , \quad \frac{a}{d} = 1 \quad , \quad n = 1$$

Wie man im folgenden Bild erkennt, sind die Schnittpunkte der Kurven f_2 mit dem Kreis $f_1^2 + \lambda^2 = 1$ sehr scharf. Man spricht auch von einem *gut konditionierten Gleichungssystem*. Das bedeutet, daß man die Kurven f_2 nur mit wenigen Punkten skizzieren muß, um schon gute Schätzwerte für die normierte Frequenz zu erhalten. Allerdings fällt besonders beim ersten Schnittpunkt auf, daß schon eine geringe Abweichung vom Wert λ_1 eine große Abweichung der Werte f_1 und f_2 voneinander bewirkt, d.h. will man Felder darstellen, so ist eine wesentlich höhere Genauigkeit als die übliche Ablesegenauigkeit erforderlich. Die abgelesenen Werte müssen also noch verfeinert werden (z.B. mit dem *Newtonverfahren*).



Die folgenden Bilder zeigen dann das Feldstärkeprofil in der Ebene $y = 0$ korrespondierend zu den vier Schwingungsmoden sowie den jeweiligen Verlauf der Verschiebungstromlinien.





Lösung der Hausaufgabe

a) Bei senkrecht polarisierten Wellen existiert nur eine x -Komponente des elektrischen Feldes $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x(y, z)$. Diese muß die HELMHOLTZgleichung erfüllen:

$$\nabla^2 E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -k^2 E_x$$

Lösungsansatz:

$$E_x = E_0 \sin k_y y e^{\pm j k_z z} \quad , \quad k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \quad , \quad k_y = \frac{n\pi}{d} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Der Ansatz garantiert, daß die elektrische Feldstärke auf den Wänden $y = 0, d$ verschwindet. Die magnetische Feldstärke folgt aus dem Induktionsgesetz

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H} \quad \rightarrow \quad H_y = \frac{j}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad , \quad H_z = -\frac{j}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

$$H_y = \mp E_0 \frac{k_z}{\omega\mu_0} \sin k_y y e^{\pm j k_z z} \quad , \quad H_z = -j E_0 \frac{k_y}{\omega\mu_0} \cos k_y y e^{\pm j k_z z}$$

b) Auf den leitenden Platten in den Ebenen $z = 0, l$ muß die elektrische Feldstärke ebenfalls verschwinden. Damit setzt sich das elektrische Feld aus einer vor- und einer rücklaufenden Welle in der Form

$$E_x = E_0 \sin k_y y (e^{+j k_z z} - e^{-j k_z z}) = 2j E_0 \sin k_y y \sin k_z z \quad , \quad k_z = \frac{m\pi}{l} \quad , \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

zusammen. Die Resonanzfrequenzen sind dann

$$\omega_{nm}^2 \varepsilon_0 \mu_0 = k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \quad \rightarrow \quad f_{nm} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{d}\right)^2 + \left(\frac{m}{l}\right)^2} .$$