

**Lösung der Aufgabe 1**

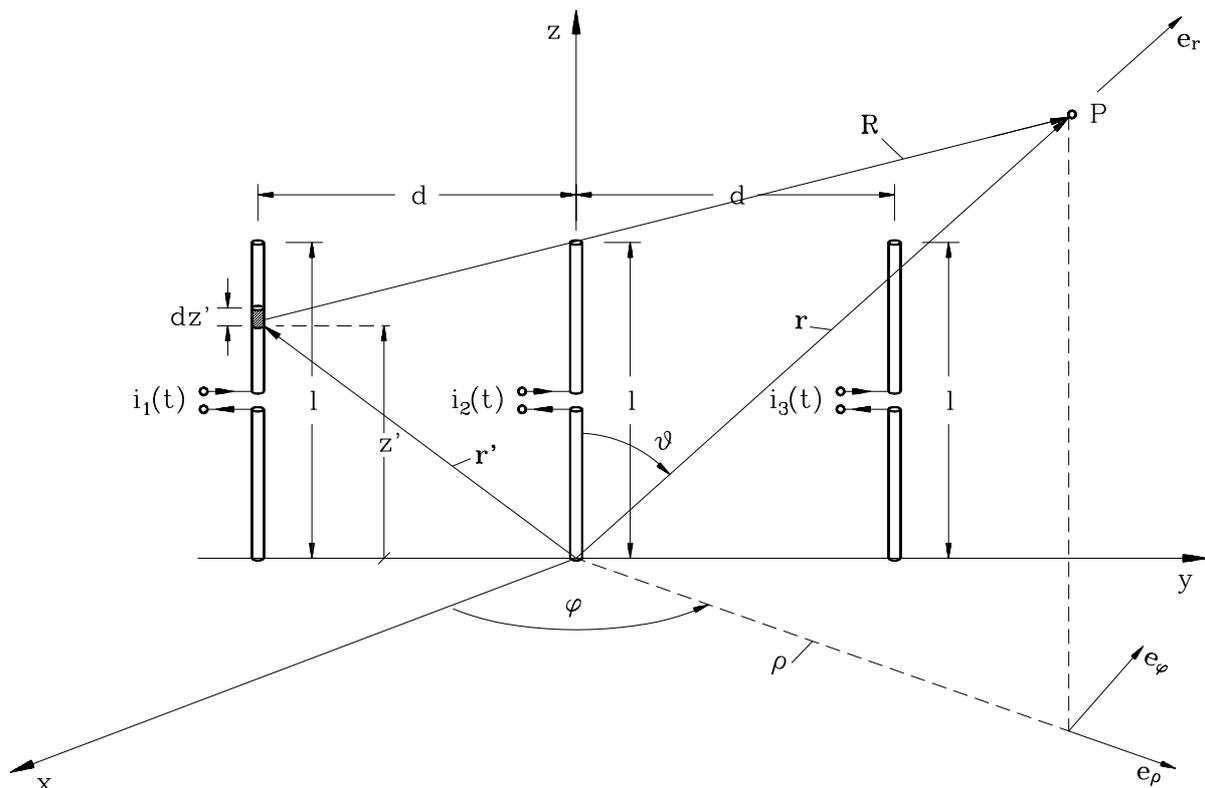
Das Strahlungsfeld einer gegebenen Stromverteilung läßt sich mit Hilfe des *retardierten Vektorpotentials*

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{R} \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c_0}\right) dV'$$

mit

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad , \quad c_0 : \text{Lichtgeschwindigkeit}$$

berechnen.  $R$  ist hierbei der Abstand zwischen dem Quellpunkt, auf den der Ortsvektor  $\mathbf{r}'$  weist, und dem Beobachtungspunkt, auf den der Ortsvektor  $\mathbf{r}$  weist.  $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - R/c_0)$  ist die Stromdichte am Quellpunkt zu einem um die Laufzeit  $R/c_0$  einer elektromagnetischen Welle zwischen Quell- und Beobachtungspunkt reduzierten Zeitpunkt. Im vorliegenden Fall setzt sich das stromführende Volumen  $V$  aus den von den Dipolen beanspruchten drei Teilvolumina zusammen. Zur analytischen Berechnung verlegen wir die Dipolgruppe in ein kartesisches Koordinatensystem.



Anordnung der Antennengruppe im Koordinatensystem

Die örtliche Verteilung der Stromdichte auf den jeweiligen Antennen ist voraussetzungsgemäß sinusförmig und kann mit Hilfe DIRACscher Deltafunktionen in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1(\mathbf{r}', t) &= \mathbf{e}_z I_{10} \cos \omega t \sin \frac{2\pi z'}{\lambda} \delta(x') \delta\left(y' + \frac{\lambda}{2}\right) \\ \mathbf{J}_2(\mathbf{r}', t) &= \mathbf{e}_z I_{20} \cos \omega t \sin \frac{2\pi z'}{\lambda} \delta(x') \delta(y') \\ \mathbf{J}_3(\mathbf{r}', t) &= \mathbf{e}_z I_{10} \cos \omega t \sin \frac{2\pi z'}{\lambda} \delta(x') \delta\left(y' - \frac{\lambda}{2}\right) \end{aligned}$$

geschrieben werden. Wegen

$$\cos \left[ \omega \left( t - \frac{R}{c_0} \right) \right] = \operatorname{Re} \left\{ e^{-jkR} e^{j\omega t} \right\} \quad \text{mit} \quad k = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

lauten damit die *Phasoren* der den jeweiligen Antennen zugeordneten Vektorpotentiale

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_1(\mathbf{r}) &= \mathbf{e}_z \frac{\mu_0}{4\pi} I_{10} \int_0^{\lambda/2} \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} \sin kz' \, dz' \\ \tilde{\mathbf{A}}_2(\mathbf{r}) &= \mathbf{e}_z \frac{\mu_0}{4\pi} I_{20} \int_0^{\lambda/2} \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} \sin kz' \, dz' \\ \tilde{\mathbf{A}}_3(\mathbf{r}) &= \mathbf{e}_z \frac{\mu_0}{4\pi} I_{10} \int_0^{\lambda/2} \frac{e^{-jkR_3}}{R_3} \sin kz' \, dz' \quad . \end{aligned}$$

Die dort eingeführten Größen  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  sind dabei die Abstände des Integrationspunktes der jeweiligen Antenne zum betrachteten Aufpunkt  $P$ .

Für sehr weit entfernte Punkte  $P$  verlaufen die Vektoren  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{R}$  annähernd parallel und unterscheiden sich in ihrer Länge in erster Näherung nur durch die Projektion des Quellpunktsvektors  $\mathbf{r}'$  auf den Ortsvektor  $\mathbf{r}$ . Man kann also schreiben

$$\boxed{R_i \approx r - \frac{\mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{r}}{r}} \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3 \quad .$$

Diese Näherung werden wir im Argument der Exponentialfunktionen anwenden. Außerdem werden wir im Fernfeld sicherlich keinen nennenswerten Fehler begehen, wenn die reziproken Abstände durch

$$\boxed{\frac{1}{R_i} \approx \frac{1}{r}}$$

approximiert und damit vor das Integral gezogen werden können. Im einzelnen erhalten wir daher

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{z1}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_{10} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_0^{\lambda/2} e^{jk(\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r})/r} \sin kz' dz' \\ \tilde{A}_{z2}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_{20} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_0^{\lambda/2} e^{jk(\mathbf{r}'_2 \cdot \mathbf{r})/r} \sin kz' dz' \\ \tilde{A}_{z3}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_{10} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_0^{\lambda/2} e^{jk(\mathbf{r}'_3 \cdot \mathbf{r})/r} \sin kz' dz' \quad .\end{aligned}$$

Mit den Quellpunktsvektoren

$$\mathbf{r}'_1 = z' \mathbf{e}_z - \frac{\lambda}{2} \mathbf{e}_y \quad , \quad \mathbf{r}'_2 = z' \mathbf{e}_z \quad , \quad \mathbf{r}'_3 = z' \mathbf{e}_z + \frac{\lambda}{2} \mathbf{e}_y$$

und dem Ortsvektor in Kugelkoordinaten

$$\frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}_r = \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \vartheta \mathbf{e}_z$$

wird aus den Skalarprodukten im Argument der Exponentialfunktionen

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}}{r} &= z' \cos \vartheta - \frac{\lambda}{2} \sin \vartheta \sin \varphi \quad , \quad \frac{\mathbf{r}'_2 \cdot \mathbf{r}}{r} = z' \cos \vartheta \\ \frac{\mathbf{r}'_3 \cdot \mathbf{r}}{r} &= z' \cos \vartheta + \frac{\lambda}{2} \sin \vartheta \sin \varphi \quad .\end{aligned}$$

Damit ist prinzipiell folgendes Integral zu lösen:

$$\begin{aligned}\int_0^{\lambda/2} \sin kz' e^{jkz' \cos \vartheta} dz' &= \left[ \frac{e^{jkz' \cos \vartheta}}{k^2 - k^2 \cos^2 \vartheta} (jk \cos \vartheta \sin kz' - k \cos kz') \right]_0^{\lambda/2} \\ &= -\frac{1}{k \sin^2 \vartheta} (e^{j\pi \cos \vartheta} \cos \pi - 1) \\ &= \frac{2 \cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{k \sin^2 \vartheta} e^{j \frac{\pi}{2} \cos \vartheta}\end{aligned}$$

Das resultierende Vektorpotential lautet dann im Fernfeld

$$\tilde{A}_{z,ges}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{e^{-j(kr - \frac{\pi}{2} \cos \vartheta)}}{kr} \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin^2 \vartheta} [I_{20} + I_{10} (e^{j\pi \sin \vartheta \sin \varphi} + e^{-j\pi \sin \vartheta \sin \varphi})]$$

bzw.

$$\tilde{A}_{z,ges}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{e^{-j(kr - \frac{\pi}{2} \cos \vartheta)}}{kr} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta)}{\sin^2 \vartheta} [I_{20} + 2 I_{10} \cos(\pi \sin \vartheta \sin \varphi)] .$$

Das magnetische Feld erhält man aus den Wirbeln des Vektorpotentials

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\mu_0} \nabla A_z \times \mathbf{e}_z .$$

Wegen

$$\nabla A_z = \mathbf{e}_r \frac{\partial A_z}{\partial r} + \mathbf{e}_\vartheta \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \vartheta}}_{\sim r^{-2}} + \mathbf{e}_\varphi \underbrace{\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi}}_{\sim r^{-2}}$$

und  $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z = -\sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi$  erhält man im Fernfeld unter Vernachlässigung aller Terme, die schneller als  $\frac{1}{r}$  abklingen

$$\tilde{H}_{\varphi,ges}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{j}{2\pi r} e^{-j(kr - \frac{\pi}{2} \cos \vartheta)} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta)}{\sin \vartheta} [I_{20} + 2 I_{10} \cos(\pi \sin \vartheta \sin \varphi)] .$$

Für die horizontale Richtcharakteristik bestimmen wir zunächst die Orte maximaler Feldstärke in der Ebene  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ .

$$\tilde{H}_{\varphi,ges} \left( r, \vartheta = \frac{\pi}{2}, \varphi \right) = \frac{j}{2\pi r} e^{-jkr} [I_{20} + 2 I_{10} \cos(\pi \sin \varphi)]$$

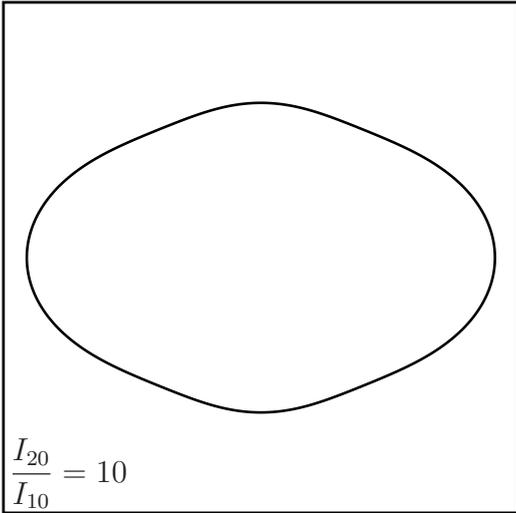
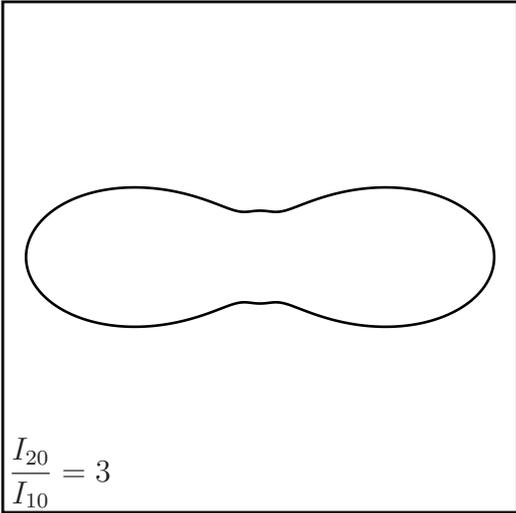
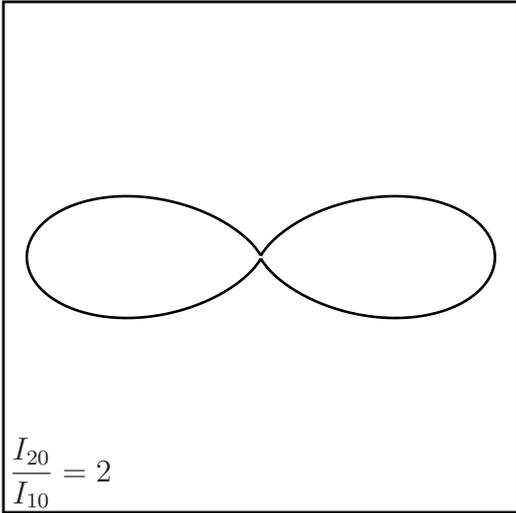
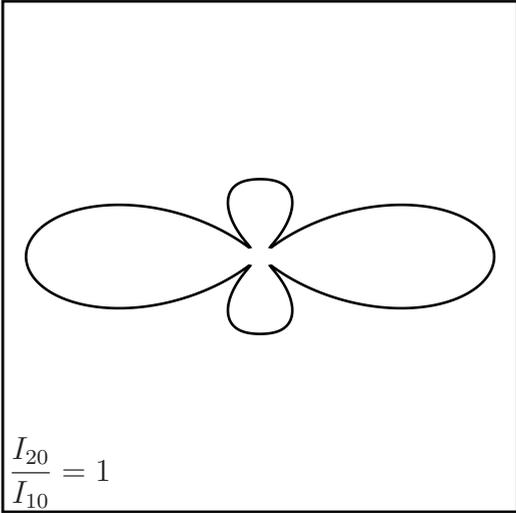
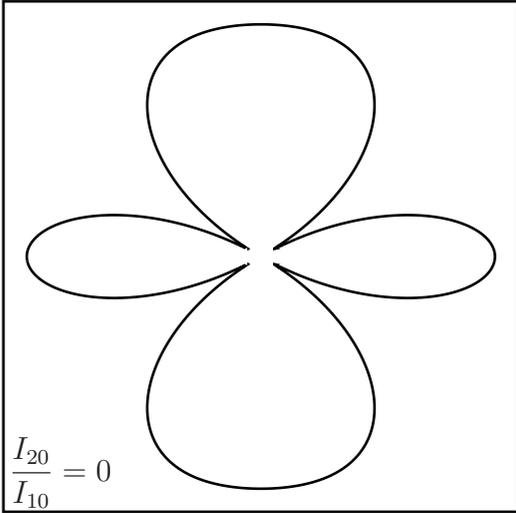
$$\frac{\partial \tilde{H}_{\varphi,ges} \left( r, \vartheta = \frac{\pi}{2}, \varphi \right)}{\partial \varphi} \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad \cos \varphi \cdot \sin(\pi \sin \varphi) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \varphi = 0, \pi & \text{("Hauptkeulen")} \\ \varphi = \pm \pi/2 & \text{("Nebenkeulen")} \end{cases}$$

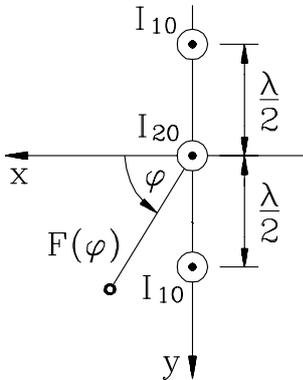
Als horizontale Richtcharakteristik kann man dann definieren

$$F(\varphi) = \left| \frac{\tilde{H}_{\varphi,ges} \left( r, \vartheta = \frac{\pi}{2}, \varphi \right)}{\tilde{H}_{\varphi,ges} \left( r, \vartheta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0 \right)} \right| = \left| \frac{I_{20} + 2 I_{10} \cos(\pi \sin \varphi)}{I_{20} + 2 I_{10}} \right| .$$

Den folgenden Bildern ist zu entnehmen, daß für  $I_{20} = 2 I_{10}$  keine Nebenkeulen auftreten.

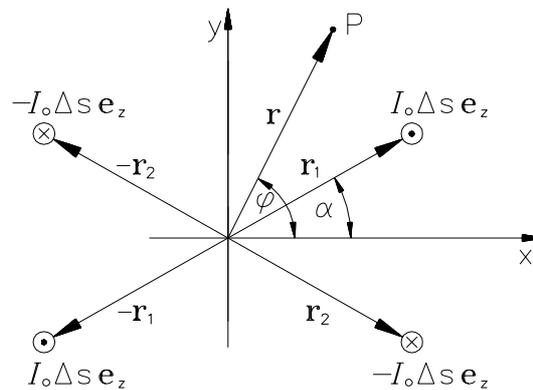


Horizontale Richtdiagramme des Gruppenstrahlers



### Lösung der Aufgabe 2

Wie in der Elektrostatik können wir das Verschwinden der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes auf den ideal leitenden Wänden durch Spiegelung erfassen.



Die magnetische Fernfeldstärke in der Ebene  $\vartheta = \pi/2$  ist dann die Superposition aller Dipolbeiträge

$$H_\varphi \approx j \frac{I_0 \Delta s k}{4\pi r} \left\{ e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} + e^{-jk|\mathbf{r}+\mathbf{r}_1|} - e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|} - e^{-jk|\mathbf{r}+\mathbf{r}_2|} \right\} .$$

*Beachte:* Im Fernfeld darf zwar wegen  $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}_{1,2}|$  der Dipolort im reziproken Abstand unterdrückt werden, nicht jedoch in der *Wellenphase*, die wesentlich empfindlicher reagiert. Hier muß vorsichtiger genähert werden:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} \pm \mathbf{r}_{1,2}| &= \sqrt{(\mathbf{r} \pm \mathbf{r}_{1,2}) \cdot (\mathbf{r} \pm \mathbf{r}_{1,2})} = \sqrt{r^2 + r_{1,2}^2 \pm 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{1,2}} \approx \\ &\approx r \sqrt{1 \pm 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{1,2}/r^2} \approx r \left( 1 \pm \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{1,2}}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Damit wird aus der Fernfeldstärke

$$\begin{aligned} H_\varphi &\approx j \frac{I_0 \Delta s k}{4\pi r} e^{-jkr} \left\{ e^{jk\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_1} + e^{-jk\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_1} - e^{jk\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_2} - e^{-jk\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_2} \right\} \\ \{ \dots \} &= 2 \cos(k\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_1) - 2 \cos(k\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_2) = \\ &= -4 \sin \frac{k\mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)}{2} \sin \frac{k\mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{2} \end{aligned}$$

mit den geometrischen Zusammenhängen

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_1 = r_1 \cos(\varphi - \alpha) \quad , \quad \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_2 = r_2 \cos(\varphi + \alpha) \quad , \quad r_1 = r_2 = a$$

$$\mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = a[\cos(\varphi - \alpha) + \cos(\varphi + \alpha)] = 2a \cos \varphi \cos \alpha$$

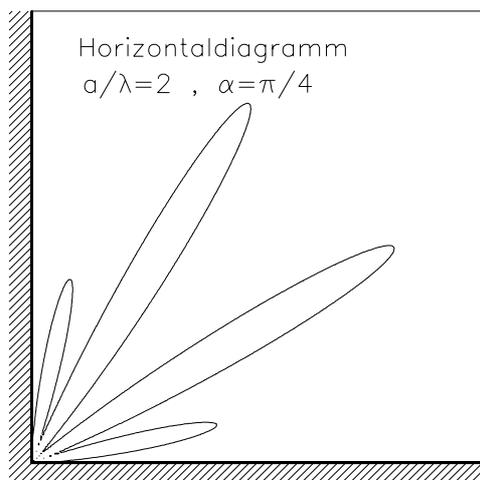
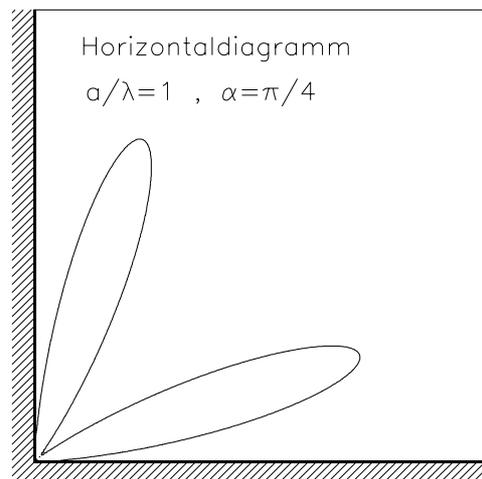
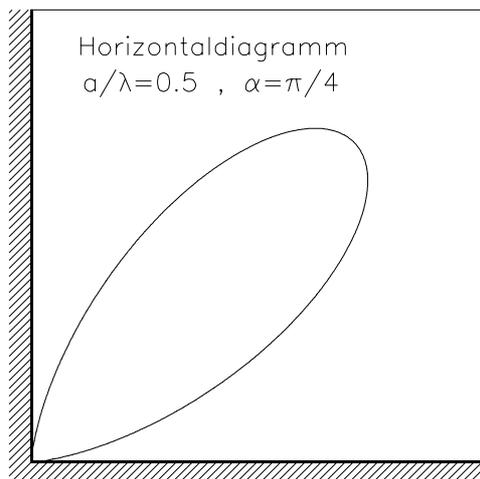
$$\mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = a[\cos(\varphi - \alpha) - \cos(\varphi + \alpha)] = 2a \sin \varphi \sin \alpha .$$

Nun läßt sich das magnetische Feld in der Horizontalebene in der übersichtlichen Form

$$H_\varphi \approx -j \frac{I_0 \Delta s k}{\pi r} e^{-jkr} \sin(ka \cos \varphi \cos \alpha) \sin(ka \sin \varphi \sin \alpha)$$

darstellen, die für die Energieberechnung aufgrund der Produktform besonders günstig ist. Die Energieflußdichte ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} S_{k,r} &= \frac{1}{2} \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2} Z_0 |H_\varphi|^2 = \\ &= \frac{1}{2} Z_0 \left( \frac{I_0 \Delta s k}{\pi r} \right)^2 \underbrace{\sin^2(ka \cos \varphi \cos \alpha) \sin^2(ka \sin \varphi \sin \alpha)}_{f(\varphi)} . \end{aligned} \quad (2)$$



Horizontale Strahlungsdiagramme  $f(\varphi)/f_{max}$  eines Hertzchen Dipols vor einer leitenden Ecke für unterschiedliche Frequenzen.

**Lösung der Hausaufgabe**

Es muß zunächst das elektromagnetische Feld bestimmt werden. Das elektrische Feld im Leiter weist nur eine ortsunabhängige  $z$ -Komponente auf, während das magnetische Feld  $\varphi$ -gerichtet ist und nach OERSTED mit Hilfe des eingeschlossenen Stromes bestimmt werden kann.

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_z \frac{U_0}{l} \quad , \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \frac{U_0 \kappa \pi r^2}{l} \frac{\varrho^2}{r^2} \quad \rightarrow \quad \mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi \frac{U_0 \kappa}{2l} \varrho$$

POYNTINGScher Vektor:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\mathbf{e}_\varrho \frac{U_0^2 \kappa}{2l^2} \varrho$$

Nach dem Energieerhaltungssatz läßt sich die Verlustleistung wie folgt bestimmen:

$$\underbrace{-\frac{\partial}{\partial t} \int_V (w_e + w_m) dV}_{=0} = \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{O} + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{Verlustleistung} = P_V = - \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{O}}$$

Offensichtlich liefert nur die Mantelfläche mit dem gerichteten Flächenelement  $d\mathbf{O} = \mathbf{e}_\varrho r d\varphi dz$  einen Beitrag:

$$P_V = \frac{U_0^2 \kappa \pi r^2}{l} = \frac{U_0^2}{R}$$