Lösung der Aufgabe 1

Bei dieser aperiodischen Anordnung wählen wir einen Lösungsansatz mit orthogonalen Funktionen in radialer Richtung

$$\boxed{\begin{aligned}\phi(\varrho,z) &= (A_0 + B_0 \ln \varrho)\cdot(C_0 + D_0 z) + \\ &+ \sum_{k_z\neq 0} [A\, J_0(k_z\varrho) + B\, N_0(k_z\varrho)]\cdot[C\, \exp(+k_z z) + D\, \exp(-k_z z)]\end{aligned}} \quad . \tag{1}$$

Hierin bezeichnen $J_0(x)$ und $N_0(x)$ die gewöhnlichen Besselfunktionen bzw. Neumannfunktionen 0–ter Ordnung. Aufgrund ihres singulären Verhaltens auf der Achse $\varrho = 0$ scheiden der natürliche Logarithmus sowie die Neumannfunktion von vornherein aus. Ein linearer Term in z–Richtung ist ebenfalls nicht möglich, da er für zunehmende Entfernung zu einem ansteigenden Potential führen würde. Aufgrund des unstetigen Potentialverlaufs in z–Richtung, sind für die Bereiche $z < 0$ und $z > 0$ getrennte Ansätze aufzustellen.

$$\phi(\varrho,z) = \begin{cases} -\phi_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(j_{0n}\dfrac{\varrho}{a}\right)\, \mathrm{e}^{-j_{0n}z/a} & \text{für} \quad z > 0 \\ +\phi_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n J_0\left(j_{0n}\dfrac{\varrho}{a}\right)\, \mathrm{e}^{+j_{0n}z/a} & \text{für} \quad z < 0 \end{cases} \quad . \tag{2}$$

Da j_{0n} die Nullstellen der Besselfunktionen J_0 bezeichnen sollen, wurde durch entsprechende Wahl des konstanten Terms im Potentialansatz die jeweilige Randbedingung auf dem leitenden Rohr bereits erfüllt. Einen ersten Zusammenhang zwischen den Konstanten A_n und B_n erhalten wir, wenn wir die Stetigkeit der Normalkomponente der elektrischen Feldstärke beim Durchgang durch die Ebene $z = 0$ fordern

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=+0} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=-0} \quad \rightarrow \quad B_n = -A_n \quad , \tag{3}$$

wohingegen der notwendige stetige Übergang des Potentials auf die Beziehung

$$\phi(\varrho, z=+0) = \phi(\varrho, z=-0) \quad \rightarrow \quad \phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(j_{0n}\frac{\varrho}{a}\right) \tag{4}$$

führt. Im Zuge der nun folgenden Fourier–Bessel Entwicklung werden beide Seiten der Gleichung mit der orthogonalen Funktion $J_0\left(j_{0m}\frac{\varrho}{a}\right)$ sowie mit der Gewichtsfunktion ϱ multipliziert und über den orthogonalen Bereich $0 \leq \varrho \leq a$ integriert

$$\phi_0 \underbrace{\int_0^a J_0\left(j_{0m}\frac{\varrho}{a}\right)\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho}_{\frac{a^2}{j_{0m}}\, J_1(j_{0m})} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\int_0^a J_0\left(j_{0n}\frac{\varrho}{a}\right) J_0\left(j_{0m}\frac{\varrho}{a}\right)\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho}_{\frac{a^2}{2}\, J_1^2(j_{0m})\,\delta_m^n}$$

$$\rightarrow \quad A_n = \frac{2\phi_0}{j_{0n}\, J_1(j_{0n})} \quad . \tag{5}$$

Das resultierende Potential lautet also

$$\boxed{\frac{\phi(\varrho, z)}{\phi_0} = \operatorname{sign}(z) \left\{ -1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(j_{0n}\frac{\varrho}{a}\right)}{j_{0n}\, J_1(j_{0n})}\ \mathrm{e}^{-j_{0n}|z|/a} \right\}} \quad . \tag{6}$$

Feldbild

Zur Veranschaulichung der Feldausbildung wurden sowohl die Äquipotentialflächen als auch die elektrischen Feldlinien dargestellt. Dabei erhält man die Feldlinien in gewohnter Art und Weise durch Konstanthalten des elektrischen Flusses

$$\psi_e \sim \int_0^{\varrho} \frac{\partial \phi}{\partial z}\, \varrho\, \mathrm{d}\varrho \stackrel{!}{=} \text{const.} \tag{7}$$

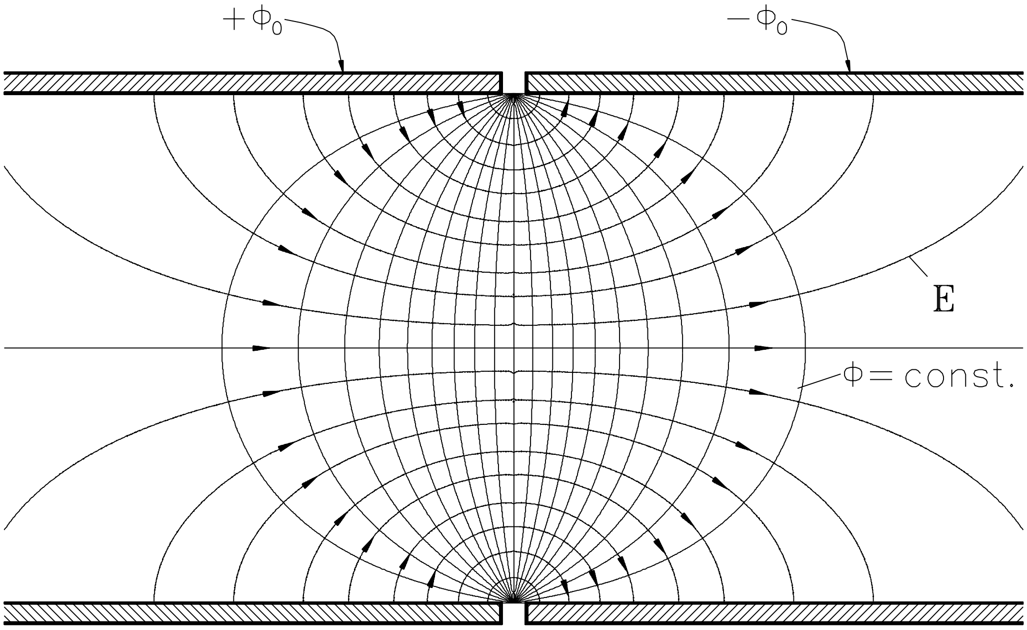
Eine kurze Rechnung liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho}{a} \frac{J_1\left(j_{0n}\frac{\varrho}{a}\right)}{j_{0n}\, J_1\left(j_{0n}\right)}\ \mathrm{e}^{-j_{0n}z/a} \stackrel{!}{=} \text{const.} \quad , \quad z > 0 \quad , \tag{8}$$

wobei

$$\int J_0\left(j_{0n}\frac{\varrho}{a}\right)\, \varrho\, \mathrm{d}\varrho = \frac{a^2}{j_{0n}}\, \frac{\varrho}{a}\, J_1\left(j_{0n}\frac{\varrho}{a}\right)$$

verwendet wurde.



Lösung der Hausaufgabe

Aufgrund der speziellen Anregung wird nur ein Glied der Lösungssumme auftreten!

$$z \leq 0: \quad \phi_1 = A\, J_0\left(j_{01}\frac{\varrho}{a}\right)\ \mathrm{e}^{\,j_{01}z/a} \quad , \quad z \geq 0: \quad \phi_2 = A\, J_0\left(j_{01}\frac{\varrho}{a}\right)\ \mathrm{e}^{\,-j_{01}z/a}$$

Die Ansätze garantieren bereits einen stetigen Potentialübergang am Ort der Flächenladung!

Stetigkeitsbedingung am Ort $z = 0$

$$D_{z2} - D_{z1} = q_{F0}\, J_0\left(j_{01}\frac{\varrho}{a}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \varepsilon_r \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0}\, J_0\left(j_{01}\frac{\varrho}{a}\right)$$

$$\rightarrow \quad A\,\frac{j_{01}}{a}\,(1+\varepsilon_r) = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Lösung:} \quad \phi(\varrho, z) = \frac{q_{F0}a}{j_{01}}\,\frac{1}{\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)}\, J_0\left(j_{01}\frac{\varrho}{a}\right)\ \mathrm{e}^{\,\pm j_{01}z/a} \quad \text{für} \quad z \lessgtr 0$$

Bei beliebiger Abhängigkeit der Flächenladung von der Koordinate ϱ muß diese in eine Fourier-Bessel-Reihe entwickelt werden. Der Lösungsansatz ist dann im allgemeinen eine Summe über alle Eigenwerte j_{0n}/a.