Lösung der Aufgabe 1

a) Als erstes betrachten wir das sogenannte *primäre Potential* einer Stromquelle I am Ort $r = a$, $\vartheta = 0$ und einer Stromsenke $-I$ am Ort $r = a$, $\vartheta = \pi$, wobei der gesamte Raum die Leitfähigkeit κ haben soll.

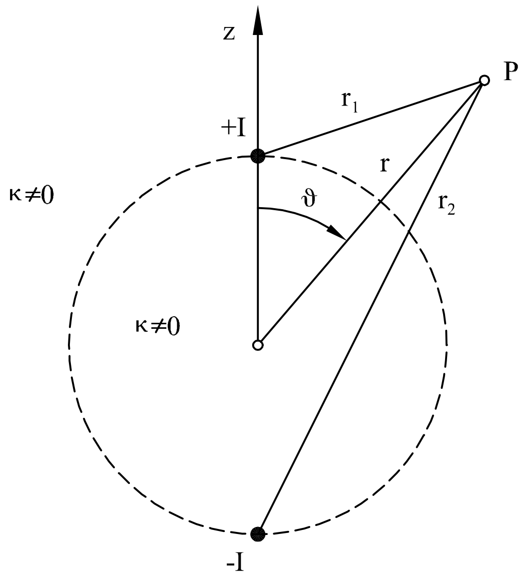


Abbildung 1: Punktförmige Stromquelle und -senke im homogenen Gesamtraum der Leitfähigkeit κ

Das Potential, das sich einstellen wird, ist Lösung der LAPLACEgleichung, die wir hier in Kugelkoordinaten verwenden. Da die Anordnung rotationssymmetrisch ist, und außerdem keine Singularitäten (außer natürlich direkt auf den punktförmigen Stromquellen) zu erwarten sind, lassen sich sofort die Ansätze

$$\phi^{(p)}(r,\vartheta) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1,3,5}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n \mathrm{P}_n(u) & , \quad r \le a \\ \sum\limits_{n=1,3,5}^{\infty} A_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \mathrm{P}_n(u) & , \quad r \ge a \end{cases} \quad , \quad u = \cos\vartheta \tag{1}$$

aufstellen, die bereits einen stetigen Übergang des Potentials auf der Fläche $r = a$ garantieren. Es werden nur die LEGENDREpolynome ungerader Ordnung verwendet, da das Potential bezüglich der Ebene $\vartheta = \pi/2$ eine ungerade Funktion sein wird. Die

LEGENDREpolynome erfüllen die *Orthogonalitätsrelation*[1]

$$\int_0^1 \mathrm{P}_n(u)\mathrm{P}_m(u)\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2n+1}\,\delta_n^m \quad , \quad n,m = 1,3,5,\ldots\ . \tag{2}$$

Nun stellen wir uns die punktförmigen Stromquellen als Grenzfall einer flächenhaften Stromquellenverteilung[2] $i_F(\vartheta)$ vor, für die gilt

$$2\pi a^2 \int_0^{\pi/2} i_F(\vartheta)\,\sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta = I \quad , \quad i_F(\vartheta) = 0 \quad \text{für} \quad \vartheta \neq 0, \pi. \tag{3}$$

Dies ist analog einer Punkt- bzw. Flächenladung in der Elektrostatik und aufgrund der Analogie des stationären Strömungsfeldes mit der Elektrostatik ist dann auf der Fläche $r = a$ die Stetigkeitsbedingung

$$-\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=a+0} + \left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=a-0} = \frac{i_F(\vartheta)}{\kappa} \tag{4}$$

einzuhalten. Daraus lassen sich die noch unbekannten Koeffizienten A_n bestimmen. Dazu machen wir von der Orthogonalitätsrelation (2) Gebrauch und multiplizieren die Stetigkeitsbedingung beidseitig mit $2\pi a^2 \mathrm{P}_m(u)$ und integrieren über den Orthogonalitätsbereich

$$\begin{aligned}
\kappa 2\pi a^2 \frac{1}{a} \sum_{1,3,5}^{\infty} A_n\,(n + [n+1]) \int_0^1 \mathrm{P}_n(u)\mathrm{P}_m(u)\ \mathrm{d}u &= \\
= 2\pi a^2 \int_0^1 i_F(\vartheta)\mathrm{P}_m(u)\ \mathrm{d}u &= \\
= 2\pi a^2 \int_0^{\pi/2} i_F(\vartheta)\mathrm{P}_m(\cos\vartheta)\,\sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta &= I\ .
\end{aligned} \tag{5}$$

Beim letzten Integral ist zu bedenken, daß der Integrand nur für $\vartheta = 0$ von null verschieden ist, so daß das LEGENDREpolynom $\mathrm{P}_m(1) = 1$ als Konstante vor das Integral gezogen werden kann. In der Summe verbleibt lediglich das Glied $n = m$ und die gesuchten Koeffizienten lauten

$$A_n = \frac{I}{2\pi\kappa a}\ . \tag{6}$$

[1] Normalerweise sind die LEGENDREpolynome im Bereich $-1 \leq u \leq +1$ orthogonal, wenn der Index n eine beliebige natürliche Zahl ist. Bei Beschränkung auf ungerade oder auch gerade Indices sind die Funktionen auch im halben Bereich orthogonal.

[2] bitte nicht zu verwechseln mit einer Flächenstromdichte J_F

Das ist natürlich noch nicht die Lösung, denn wir hatten ja eingangs angenommen, daß der *gesamte* Raum die Leitfähigkeit κ aufweist. Um den gemachten Fehler zu korrigieren überlagern wir innerhalb der Kugel ein *sekundäres Potential*

$$\phi^{(s)}(r,\vartheta) = \frac{I}{2\pi\kappa a} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} B_n \left(\frac{r}{a}\right)^n \mathrm{P}_n(u) \tag{7}$$

dessen Koeffizienten so zu wählen sind, daß auf der Kugeloberfläche die Randbedingung

$$\frac{\partial}{\partial r}\,\phi^{(p)}(r,\vartheta)\Big|_{r=a+0} + \frac{\partial}{\partial r}\,\phi^{(s)}(r,\vartheta)\Big|_{r=a} = 0 \tag{8}$$

eingehalten wird, denn der Strom darf ja nicht in den nichtleitenden Außenraum austreten, so daß eine Radialkomponente der Stromdichte auf der Kugeloberfläche nicht möglich ist. Einsetzen liefert

$$\frac{1}{a}\left(-[n+1] + nB_n\right) = 0 \quad \rightarrow \quad B_n = \frac{n+1}{n}\ . \tag{9}$$

Das gesuchte Potential innerhalb der Kugel ist schließlich

$$\boxed{\phi(r,\vartheta) = \frac{I}{2\pi\kappa a} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{2n+1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \mathrm{P}_n(u)}\ . \tag{10}$$

Manchmal gelingt es, solche unendlichen Summen durch einfache Funktionen auszudrücken. Das Ergebnis läßt sich nämlich in 2 Terme aufspalten

$$\phi(r,\vartheta) = 2\phi^{(p)} + \frac{I}{2\pi\kappa a} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \mathrm{P}_n(u)\ , \tag{11}$$

wobei aufgrund des Faktor $1/n$ der zweite Term durch Integration des ersten darstellbar ist

$$\frac{I}{2\pi\kappa a} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \mathrm{P}_n(u) = \int\limits_0^{r/a} \frac{a}{r}\,\phi^{(p)}\ \mathrm{d}\left(\frac{r}{a}\right)\ . \tag{12}$$

Es erhebt sich die Frage, was man wohl mit dieser Darstellung gewonnen hat. Der Vorteil, alles durch das primäre Potential auszudrücken, liegt darin, daß man dieses nach Abb. 1 auch in der Form

$$\phi^{(p)} = \frac{I}{4\pi\kappa a}\left(\frac{a}{r_1} - \frac{a}{r_2}\right) \quad \text{mit} \quad \frac{r_{1,2}}{a} = \sqrt{\frac{r^2}{a^2} + 1 \mp 2\frac{r}{a}\,\cos\vartheta} \tag{13}$$

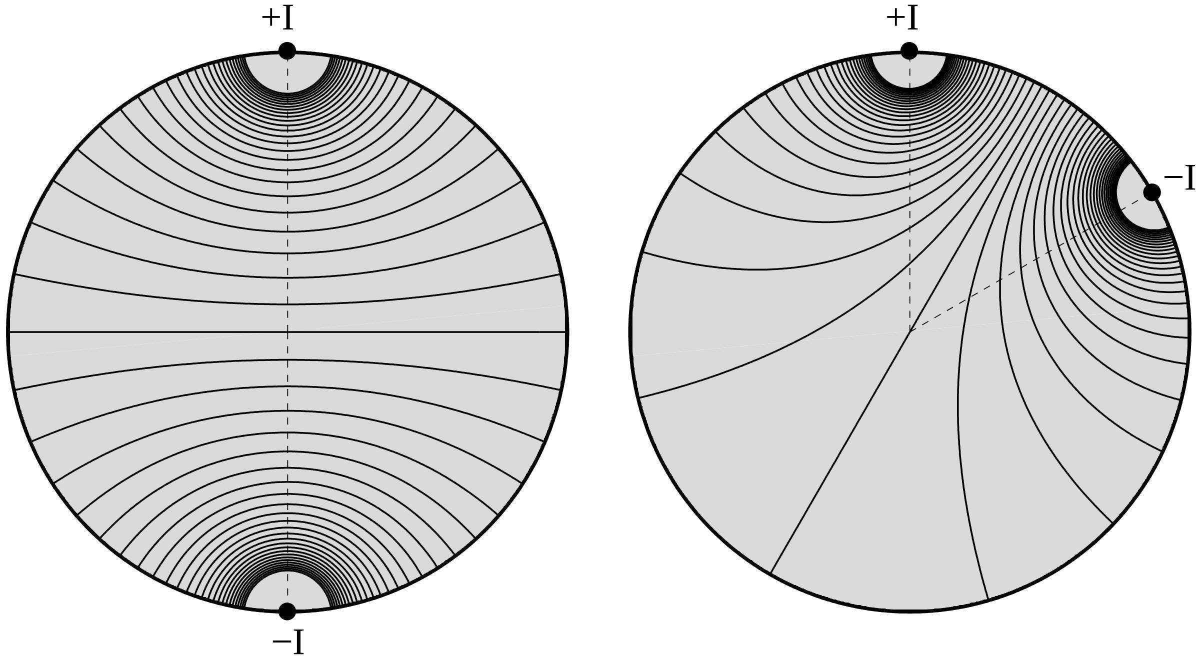
ohne Verwendung von Legendrepolynomen schreiben kann. Die auftretenden Integrale lassen sich mit Hilfe von `Bronstein #258`

$$\int \frac{a}{r}\,\frac{a}{r_{1,2}}\ \mathrm{d}\left(\frac{r}{a}\right) = -\ln\left(2\,\frac{r_{1,2}}{r} + 2\,\frac{a}{r} \mp 2\,\cos\vartheta\right) \tag{14}$$

lösen, und wir erhalten schließlich den geschlossenen Ausdruck

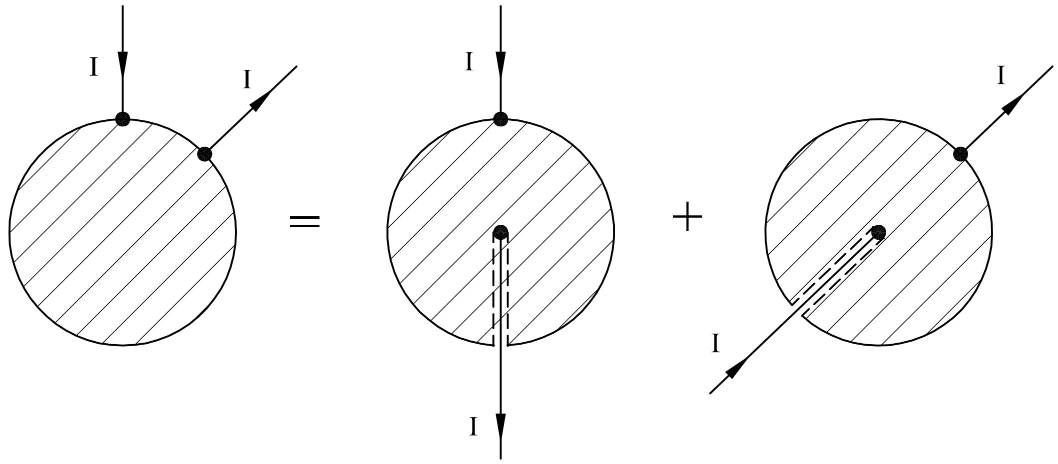
$$\boxed{\phi = \frac{I}{2\pi\kappa a}\left(\frac{a}{r_1} - \frac{a}{r_2} - \frac{1}{2}\ln\frac{r_1 + a - r\cos\vartheta}{r_2 + a + r\cos\vartheta}\right)}\,. \tag{15}$$

Das folgende Bild zeigt die Äquipotentialflächen im Falle von diametral gegenüber liegenden Stromquellen sowie für eine nicht rotationssymmetrische Anordnung.



Das Resultat (15) ist übrigens nicht uninteressant. Man hätte ja vermuten können, daß analog zur Elektrostatik eine Spiegelung möglich ist. Bei einer punktförmigen Stromquelle vor einem nichtleitenden Halbraum kann man z.B. mit einer gespiegelten Punktquelle gleichen Vorzeichens rechnen. Im Falle einer Kugel geht das offensichtlich nicht mehr, wie man am dritten Term des Ergebnisses (15) unschwer erkennt.

b) Den allgemeinen Fall kann man sich als Überlagerung von zwei jeweils für sich genommen rotationssymmetrischen Anordnungen vorstellen.
In den Teilanordnungen wird jeweils eine punktförmige Stromquelle bzw. -senke durch eine Stromquelle bzw. -senke im Mittelpunkt der Kugel ersetzt, deren Zuleitung isoliert nach außen geführt wird. Da man natürlich in den Teilanordnungen das Koordinatensystem unterschiedlich orientiert, d.h. die Rotationsachse geht immer durch beide Punktquellen, muß bei der Superpostion noch eine Koordinatentransformation durchgeführt werden.


I
I
=
I
I
+
I
I