Lösung der Aufgabe 1

a) Beim Abschalten des äußeren Magnetfeldes passiert physikalisch folgendes: In den Platten werden Ströme in z-Richtung induziert. Zum Zeitpunkt $t = 0$ fließen sie als Flächenstrombeläge auf den Flächen $x = \pm b$. Der Flächenstrom am Ort $x = +b$ fließt dabei in negative z-Richtung während der Flächenstrom am Ort $x = -b$ entgegengesetzt fließt. Die Ströme versuchen nämlich das magnetische Feld nach der Lenzschen Regel aufrechtzuerhalten. Das gelingt ihnen mit fortschreitender Zeit immer schlechter, da ein Diffusionsprozess einsetzt, bei dem sich die Flächenströme über die leitenden Platten verteilen und dabei in ihrer Stärke nachlassen bis für $t \to \infty$ der gesamte Raum feldfrei ist.

b) Bei Vernachlässigung der Randeffekte stellt sich im leitenden Bereich der Anordung ein magnetisches Feld

$$\mathbf{H} = H_y(x,t)\,\mathbf{e}_y \tag{1}$$

ein welches nur von der Koordinate x und der Zeit t abhängig ist und damit die *Diffusionsgleichung* in der Form

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} - \mu_0\kappa\,\frac{\partial H_y}{\partial t} = 0} \tag{2}$$

erfüllt. Die Separation dieser Gleichung führt bekanntlich auf den allgemeinen Lösungsansatz

$$H_y(x,t) = A_0 + B_0 x + \sum_{p\neq 0} (A_p \cos px + B_p \sin px)\ \mathrm{e}^{-t/\tau_p} \tag{3}$$

mit der *Diffusionskonstanten*

$$\tau_p = \frac{\mu_0\kappa}{p^2}\ . \tag{4}$$

Da zu allen Zeiten $t > 0$ das magnetische Feld am Ort $x = b$ und für $t \to \infty$ im gesamten Bereich verschwindet, läßt sich der Ansatz reduzieren

$$H_y(x,t) = \sum_{p\neq 0} C_p\ \sin p(x-b)\,\mathrm{e}^{-t/\tau_p}\ . \tag{5}$$

Nach Maxwell ist mit diesem Magnetfeld ein z-gerichtetes elektrisches Feld

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \kappa\,E_z \quad \to \quad E_z(x,t) = \frac{1}{\kappa}\sum_{p\neq 0} p\,C_p\ \cos p(x-b)\,\mathrm{e}^{-t/\tau_p} \tag{6}$$

verbunden. Im nichtleitenden Bereich $0 \leq x \leq a$ stellt sich hingegen ein homogenes y-gerichtetes Magnetfeld ein

$$H_i(t) = \sum_{p\neq 0} D_p\,\mathrm{e}^{-t/\tau_p}\ . \tag{7}$$

Wiederum nach MAXWELL findet man leicht das z-gerichtete elektrische Feld im nichtleitenden Bereich[1]

$$\frac{\partial E_i}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial H_i}{\partial t} \quad \rightarrow \quad E_i(x,t) = -\mu_0 x \sum_{p \neq 0} D_p \, \frac{1}{\tau_p} \, \mathrm{e}^{-t/\tau_p} \; . \tag{8}$$

Zur Bestimmung der Separationskonstanten p werden wir nun die *Stetigkeitsbedingungen* in der Ebene $x = a$ betrachten

$$H_y(x=a,t) = H_i(t) \quad , \quad E_z(x=a,t) = E_i(x=a,t) \; . \tag{9}$$

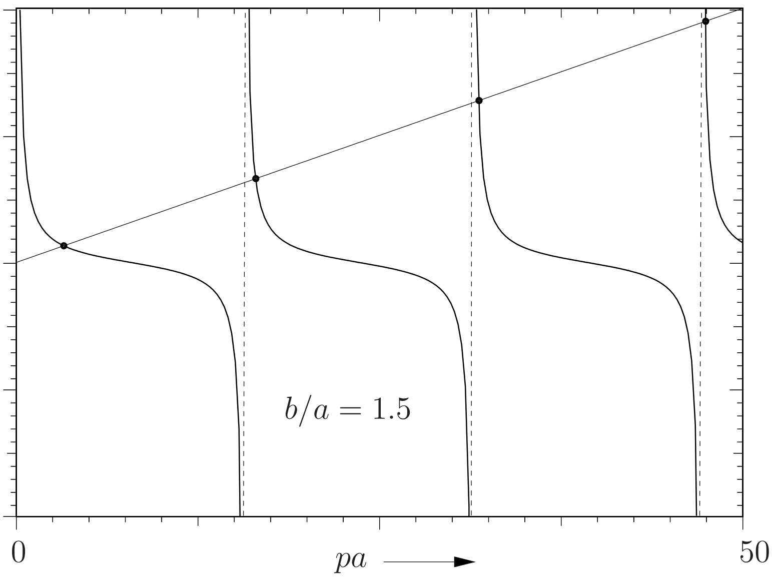
Setzt man die Felder ein, so ergeben sich die beiden linearen Gleichungen

$$C_p \, \sin p(a-b) = D_p \quad , \quad C_p \, \cos p(a-b) = -pa \, D_p \; ,$$

nach deren Division die transzendente Gleichung

$$\boxed{\cot p(b-a) = pa} \tag{10}$$

für die gesuchten Separationskonstanten entsteht. Diese läßt sich z.B. grafisch lösen, indem man die Schnittpunkte der Funktion $\cot p(b-a)$ mit der Geraden pa ermittelt.



Wie man sieht, gibt es unendlich viele diskrete Separationskonstanten, die wir von nun an p_n, mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ nennen. Zur Bestimmung der somit auch diskreten Konstanten

[1] die im Prinzip mögliche Integrationskonstante entfällt, da das elektrische Feld eine ungerade Funktion des Ortes sein muß.

$C_p = C_n$ ziehen wir die bei der physikalischen Diskussion gefundene *Anfangsbedingung*

$$H_y(x, t = +0) = H_a \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, S_n(x) = H_a \tag{11}$$

mit

$$S_n(x) = \begin{cases} \sin p_n(x - b) & \text{für} \quad a \leq x \leq b \\ \sin p_n(a - b) & \text{für} \quad 0 \leq x \leq a \end{cases} \tag{12}$$

heran, nach der das Feld im Bereich $0 \leq x < b$ *unmittelbar* nach dem Abschalten immer noch den Wert des äußeren Magnetfeldes hat. Um daraus die Konstanten C_n zu gewinnen, wird eine *Orthogonalentwicklung* erforderlich. Wir multiplizieren dazu die Anfangsbedingung beidseitig mit $S_m(x)$ und integrieren über den Bereich $0 \leq x \leq b$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^b S_n(x) \, S_m(x) \, \mathrm{d}x = H_a \int_0^b S_m(x) \, \mathrm{d}x \, . \tag{13}$$

Das Integral auf der linken Seite wird zu

$$\begin{aligned} & a \sin p_n(a - b) \sin p_m(a - b) + \int_a^b \sin p_n(x - b) \, \sin p_m(x - b) \, \mathrm{d}x = \\ & = \begin{cases} \dfrac{b - a}{2} - \dfrac{1}{4p_n} \sin 2p_n(b - a) & \text{für} \quad p_n = p_m \\ \dfrac{p_m \sin p_n(b - a) \cos p_m(b - a) - p_n \cos p_n(b - a) \sin p_m(b - a)}{p_n^2 - p_m^2} & \text{für} \quad p_n \neq p_m \end{cases} \\ & + a \sin p_n(a - b) \sin p_m(a - b) \, . \end{aligned} \tag{14}$$

Berücksichtigt man noch die Bestimmungsgleichung für die Separationskonstanten (10), so zeigt sich, daß das Integral für $p_n \neq p_m$ verschwindet, d.h.

$$\int_0^b S_n(x) \, S_m(x) \, \mathrm{d}x = \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2} \cos^2 p_n(b - a) \right) \delta_m^n \tag{15}$$

und mit dem Integral auf der rechten Seite

$$\begin{aligned} \int_0^b S_n(x) \, \mathrm{d}x &= a \sin p_n(a - b) + \int_a^b \sin p_n(x - b) \, \mathrm{d}x \\ &= a \sin p_n(a - b) + \frac{1}{p_n} \left[\cos p_n(b - a) - 1 \right] = -\frac{1}{p_n} \end{aligned}$$

erhält man die gesuchten Konstanten

$$\boxed{C_n = -2H_a \frac{1}{p_n} \frac{1}{b - a\,\cos^2 p_n(b-a)}} \,, \tag{16}$$

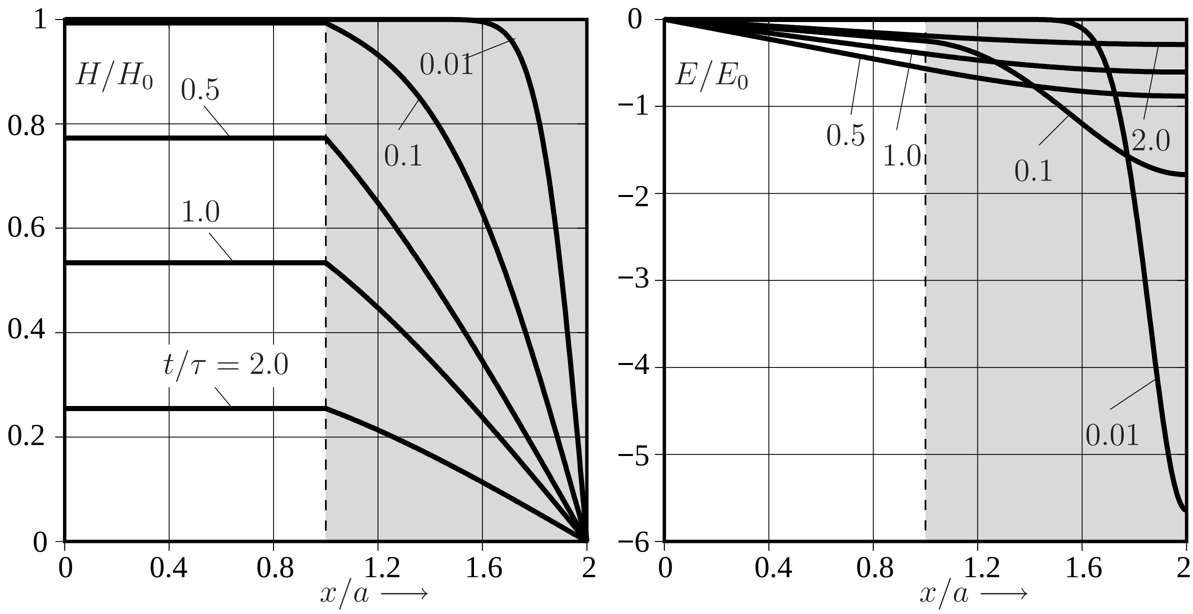
womit das Problem gelöst wäre.

Spezialfall $a = 0$

Für $a = 0$, d.h. wenn aus den beiden Platten eine einzige Platte mit doppelter Dicke wird, ist die Lösung der Gleichung (10) einfach

$$p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2b} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \,. \tag{17}$$

Diese Werte kann man dann als Startwerte verwenden, um die Separationskonstanten im Falle $a \neq 0$ numerisch z.B. mit dem NEWTONverfahren aufzufinden.
Im folgenden Bild wurde der Verlauf der magnetischen und elektrischen Feldstärke zu verschiedenen Zeitpunkten dargestellt. Wie man sieht, sind die Felder am Übergang $x = a$ stetig, was ein sicherer Hinweis darauf ist, daß die transzendente Eigenwertgleichung numerisch korrekt gelöst wurde. Im Gegensatz zum Magnetfeld, das am Ort $x = a$ einen Knick aufweist, ist das elektrische Feld überall stetig differenzierbar.



Magnetische und elektrische Feldstärke zu verschiedenen Zeitpunkten mit $E_0 = H_0/(\kappa a)$, $\tau = \mu_0 \kappa a^2$ und für $b/a = 2$

Lösung der Hausaufgabe

Potential des Dipols im freien Raum:

$$\phi_D = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos\vartheta = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} P_1(\cos\vartheta)$$

Das Störfeld infolge des Dielektrikums ist Lösung der Laplacegleichung in Kugelkoordinaten.
Wegen $\phi_D \sim P_1(\cos\vartheta)$ wird nur das erste Glied $n = 1$ der Lösungsumme angesetzt:

$$\text{innen}: \ \phi_{S1} = A\frac{r}{a}\cos\vartheta \quad , \quad \text{außen}: \ \phi_2 = B\frac{a^2}{r^2}\cos\vartheta$$

$$\phi_1 = \phi_D + \phi_{S1}$$

Randbedingungen:

$$(i) \quad \phi_1(r = a) = \phi_2(r = a) \rightarrow A + \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = B$$

$$(ii) \quad \varepsilon_r \frac{\partial\phi_2}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \frac{\partial\phi_1}{\partial r}\bigg|_{r=a} \rightarrow -\varepsilon_r B\frac{2}{a} = -2\frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 a^3} + \frac{A}{a}$$

$$-\frac{2\varepsilon_r}{a}\left(A + \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right) = -2\frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 a^3} + \frac{A}{a}$$

$$\rightarrow \quad A = \frac{2p_e}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\frac{1-\varepsilon_r}{1+2\varepsilon_r}$$

Lösung:

$$\boxed{\phi_1 = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left\{\frac{a^2}{r^2} + \frac{r}{a}2\frac{1-\varepsilon_r}{1+2\varepsilon_r}\right\}\cos\vartheta}$$