Lösung der Aufgabe 1

Zunächst bietet es sich an, eine FOURIERentwicklung der Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ durchzuführen. Dabei treten aufgrund der Symmetrie zur Ebene $z = 0$ bei der Funktion $f_1(z)$ nur Kosinusfunktionen und bei $f_2(z)$ nur Sinusfunktionen auf.

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{(2n-1)\pi z}{2b} \tag{1}$$

$$a_n = -\frac{2}{b} \int\limits_0^{b/2} \cos \frac{(2n-1)\pi z}{2b} \; \mathrm{d}z = -\frac{\sin([2n-1]\pi/4)}{[2n-1]\pi/4}$$

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2b} \tag{2}$$

$$b_n = -\frac{2}{b} \int\limits_{b/2}^{b} \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2b} \; \mathrm{d}z = -\frac{\cos([2n-1]\pi/4)}{[2n-1]\pi/4}$$

In TET I haben wir gelernt, daß eine kreisförmige Leiterschleife ein allein φ–gerichtetes Vektorpotential erzeugt. Demnach läßt sich das magnetische Feld der vorliegenden Spulenanordnung ebenfalls aus einem φ–gerichteten Vektorpotential in der Form

$$\mu_0 H_\varrho = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \quad , \quad \mu_0 H_z = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial(\varrho A_\varphi)}{\partial \varrho} \tag{3}$$

bestimmen. Das Vektorpotential muß die vektorielle LAPLACEgleichung erfüllen

$$\nabla^2 \{\mathbf{e}_\varphi \, A_\varphi(\varrho, z)\} = 0 \; . \tag{4}$$

Dabei ist unbedingt darauf zu achten, daß der Einheitsvektor $\mathbf{e}_\varphi$ ortsabhängig ist und folglich mitdifferenziert werden muß. Dies geht am besten dadurch, daß man ihn in seine kartesischen Komponenten zerlegt

$$-\mathbf{e}_x \, \nabla^2 \{\sin\varphi \, A_\varphi(\varrho, z)\} + \mathbf{e}_y \, \nabla^2 \{\cos\varphi \, A_\varphi(\varrho, z)\} = 0 \; .$$

Mit dem LAPLACEoperator in Zylinderkoordinaten

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

und dem Produktansatz

$$A_\varphi(\varrho, z) = R(\varrho) \cdot Z(z)$$

wird z.B. aus der x-Komponente[1]

$$-\sin\varphi\, Z\left(\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\,\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varrho}\right)-\sin\varphi\, R\,\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{\varrho^2}\,\sin\varphi\, R\, Z=0$$

$$\rightarrow\quad \underbrace{\frac{1}{R}\left(\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\,\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\varrho}\right)-\frac{1}{\varrho^2}}_{=+k_{zn}^2}+\underbrace{\frac{1}{Z}\,\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}}_{=-k_{zn}^2}=0\ .$$

Die Separation wurde so vorgenommen, daß in z-Richtung trigonometrische Funktionen entstehen, wobei die Separationskonstanten k_{zn} durch die FOURIERentwicklung des Flächenstromes als

$$k_{zn}=\frac{(2n-1)\pi}{2b}\quad,\quad n=1,2,3,\ldots \tag{5}$$

festgelegt sind. Die Differentialgleichung in radialer Richtung läßt sich in der Form

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}u^2}+\frac{1}{u}\,\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}u}-\left(1+\frac{1}{u^2}\right)R=0\quad\text{mit}\quad u=k_{zn}\varrho \tag{6}$$

als modifizierte BESSELsche Differentialgleichung 1. Ordnung erkennen, so daß wir schließlich folgenden Ansatz für das Vektorpotential aufstellen können

$$A_\varphi(\varrho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{lll}\mathrm{I}_1(k_{zn}\varrho)\,\mathrm{K}_1(k_{zn}a) & \text{für} & \varrho\le a\\ \mathrm{K}_1(k_{zn}\varrho)\,\mathrm{I}_1(k_{zn}a) & \text{für} & \varrho\ge a\end{array}\right\}\{C_{1n}\,\cos k_{zn}z+C_{2n}\,\sin k_{zn}z\}\ , \tag{7}$$

der bereits so zugeschnitten wurde, daß ein stetiger Übergang des Vektorpotentials durch die Fläche $\varrho=a$ garantiert ist. Zur Bestimmung der unbekannten Konstanten C_{1n} und C_{2n} betrachten wir die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke $\mathbf{H}$ auf der Fläche $\varrho=a$, die dort aufgrund der Flächenströme $\mathbf{J}_{F1}$ und $\mathbf{J}_{F2}$ ein unstetiges Verhalten zeigt

$$H_z(\varrho=a-0)-H_z(\varrho=a+0)=\frac{1}{\mu_0 a}\left(\left.\frac{\partial(\varrho A_\varphi)}{\partial\varrho}\right|_{\varrho=a-0}-\left.\frac{\partial(\varrho A_\varphi)}{\partial\varrho}\right|_{\varrho=a+0}\right)=J_{F1}+J_{F2}\ . \tag{8}$$

Mit den Ableitungen

$$\frac{\mathrm{d}(\varrho\mathrm{I}_1)}{\mathrm{d}\varrho}=k_{zn}\varrho\,\mathrm{I}_0(k_{zn}\varrho)\quad,\quad\frac{\mathrm{d}(\varrho\mathrm{K}_1)}{\mathrm{d}\varrho}=-k_{zn}\varrho\,\mathrm{K}_0(k_{zn}\varrho)$$

und der WRONSKI–Determinante

$$\mathrm{I}_1(k_{zn}\varrho)\,\mathrm{K}_0(k_{zn}\varrho)+\mathrm{K}_1(k_{zn}\varrho)\,\mathrm{I}_0(k_{zn}\varrho)=\frac{1}{k_{zn}\varrho}$$

[1]Bei Verwendung der y-Komponente ergibt sich letztendlich natürlich dasselbe Resultat.

wird daraus

$$k_{zn}\,\underbrace{\{\mathrm{I}_1(k_{zn}a)\,\mathrm{K}_0(k_{zn}a)+\mathrm{K}_1(k_{zn}a)\,\mathrm{I}_0(k_{zn}a)\}}_{=(k_{zn}a)^{-1}}\{C_{1n}\,\cos k_{zn}z+C_{2n}\,\sin k_{zn}z\} = \\ = \frac{\mu_0 N I_0}{b}\,(a_n\,\cos k_{zn}z\,\cos\omega t+b_n\,\sin k_{zn}z\,\sin\omega t)$$

und wir erhalten durch Koeffizientenvergleich

$$C_{1n}=-\mu_0 N I_0\,\frac{a}{b}\,\frac{\sin([2n-1]\pi/4)}{[2n-1]\pi/4}\,\cos\omega t \quad , \quad C_{2n}=-\mu_0 N I_0\,\frac{a}{b}\,\frac{\cos([2n-1]\pi/4)}{[2n-1]\pi/4}\,\sin\omega t \; . \tag{9}$$

Für die *Grundwelle* mit $n=1$ gilt

$$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C_{11}\,\cos k_{z1}z+C_{21}\,\sin k_{z1}z=-\mu_0 N I_0\,\frac{a}{b}\,\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,\underbrace{(\cos k_{z1}z\,\cos\omega t+\sin k_{z1}z\,\sin\omega t)}_{=\cos(\omega t-k_{z1}z)}$$

und man erkennt, daß es sich um eine Welle handelt, die sich mit der Geschwindigkeit

$$v_p=\frac{\omega}{k_{z1}}=\omega\,\frac{2b}{\pi}=4bf \tag{10}$$

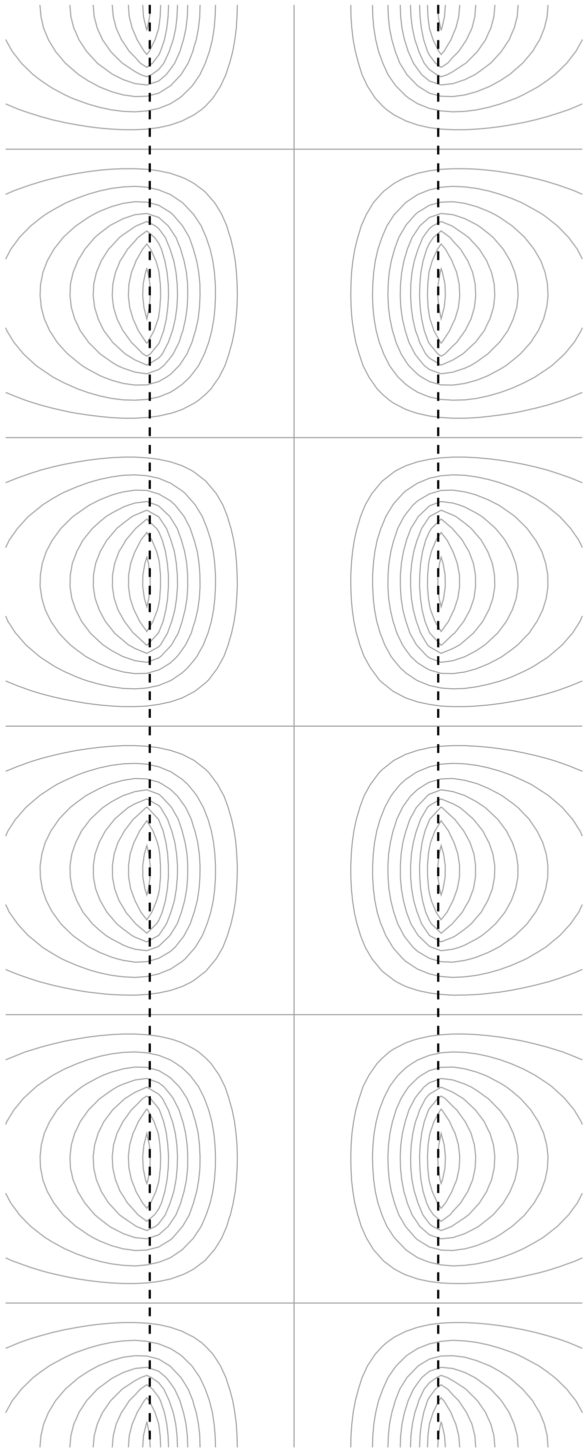
entlang der z-Achse ausbreitet.
Da uns das Vektorpotential der Anordnung nun bekannt ist, können wir zur Berechnung der magnetischen Feldlinien schreiten

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{r}\times\mathbf{B} &= \mathrm{d}\mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{A})=(\,\mathrm{d}\varrho\,\mathbf{e}_\varrho+\,\mathrm{d}z\,\mathbf{e}_z)\times\left(-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_\varrho+\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial(\varrho A_\varphi)}{\partial\varrho}\,\mathbf{e}_z\right)= \\ &= -\mathbf{e}_\varphi\left(\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial(\varrho A_\varphi)}{\partial\varrho}\,\mathrm{d}\varrho+\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right)=0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial(\varrho A_\varphi)}{\partial\varrho}\,\mathrm{d}\varrho+\frac{\partial(\varrho A_\varphi)}{\partial z}\,\mathrm{d}z=\,\mathrm{d}(\varrho A_\varphi)=0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\varrho\,A_\varphi(\varrho,z)=\mathrm{const.}}$$

und stellen fest, daß die Feldlinien mit den Höhenlinien der Funktion $\varrho A_\varphi(\varrho,z)$ übereinstimmen. Das Bild zeigt die magnetischen Feldlinien zum Zeitpunkt $t=0$.

Fortsetzung folgt.



Magnetische Feldlinien der vorgelegten Spulenanordnung zum Zeitpunkt $t = 0$

Lösung der Hausaufgabe

- $\mathbf{H} = \mathbf{e}_y H_y(x) \quad , \quad \dfrac{\mathrm{d}^2 H_y}{\mathrm{d}x^2} = j\omega\kappa\mu H_y \quad$ für $a \leq x \leq a+d$
- Aus Symmetriegründen wird nur der Raum $x \geq 0$ betrachtet
- Randbedingungen: $(i) \quad x = a + d \rightarrow H_y = 0$

$$(ii) \quad x = a \rightarrow \oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = I_0 \quad \Rightarrow \quad H_y = \frac{I_0}{h}$$

$$\begin{aligned}
(i) \quad &\Rightarrow \quad H_y &= \; & A \sinh\left\{ \sqrt{j\omega\kappa\mu}\,(x-a-d) \right\} \\
(ii) \quad &\Rightarrow \quad H_y &= \; & -\frac{I_0}{h} \frac{\sinh\left(\sqrt{j\omega\kappa\mu}\,[x-a-d]\right)}{\sinh\left(\sqrt{j\omega\kappa\mu}\,d\right)}
\end{aligned}$$