

UNIVERSITÄT PADERBORN

Fakultät EIM

Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik

Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik

Prof. Dr.-Ing. R. Schuhmann

Klausur Theoretische Elektrotechnik A

MUSTERLÖSUNG

21. Februar 2008

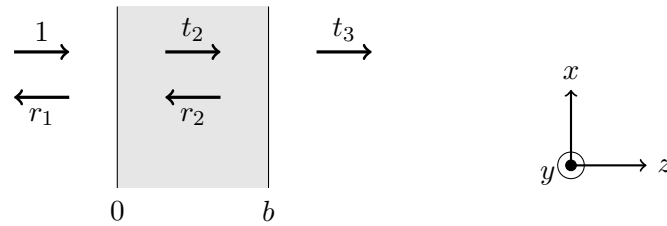
Name:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

Prüfungsnr.:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | HÜ | Summe |
|---------|---|---|---|---|----|-------|
| Punkte  |   |   |   |   |    |       |



1. Geben Sie den Feldwellenwiderstand  $Z_2$  sowie die Wellenzahl  $k_{z2}$  im Inneren der Platte in Abhängigkeit von  $\varepsilon_r$  an.

Wellenzahl und Feldwellenwiderstand nach Skript:

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad (1)$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}$$

2. Skizzieren Sie die Anordnung und geben Sie für alle Raumteile einen Ansatz für die elektrische wie auch magnetische Feldstärke an. Leiten sie aus den Stetigkeitsbedingungen ein Gleichungssystem für die Reflexions- und Transmissionsfaktoren ab.

Ansätze für alle drei Raumteile (Skript Kapitel 7.3.2):

$$E_{x1} = E_0 \left( e^{-jk_{z1}z} + r_1 e^{jk_{z1}z} \right)$$

$$E_{x2} = E_0 \left( t_2 e^{-jk_{z2}z} + r_2 e^{jk_{z2}z} \right)$$

$$E_{x3} = E_0 \left( t_3 e^{-jk_{z3}(z-b)} \right)$$

$$H_{y1} = \frac{E_0}{Z_1} \left( e^{-jk_{z1}z} - r_1 e^{jk_{z1}z} \right)$$

$$H_{y2} = \frac{E_0}{Z_2} \left( t_2 e^{-jk_{z2}z} - r_2 e^{jk_{z2}z} \right)$$

$$H_{y3} = \frac{E_0}{Z_3} \left( t_3 e^{-jk_{z3}(z-b)} \right)$$

Hier gilt wegen gleicher Materialien:  $Z_1 = Z_3 = Z_0$ ;  $k_{z1} = k_{z3}$ . Weiterhin sind die folgenden Stetigkeitsbedingungen zu erfüllen:

$$E_x(0^-) = E_x(0^+)$$

$$H_y(0^-) = H_y(0^+)$$

$$E_x(b^-) = E_x(b^+)$$

$$H_y(b^-) = H_y(b^+).$$

Setzt man diese ein, folgt das Gleichungssystem:

$$1 + r_1 = t_2 + r_2 \quad (2)$$

$$1 - r_1 = \frac{Z_0}{Z_2} (t_2 - r_2) \quad (3)$$

$$t_2 e^{-jk_{z2}b} + r_2 e^{jk_{z2}b} = t_3 \quad (4)$$

$$t_2 e^{-jk_{z2}b} - r_2 e^{jk_{z2}b} = \frac{Z_2}{Z_0} t_3. \quad (5)$$

3. **Leiten Sie aus dem Gleichungssystem eine Bedingung für  $k_{z2}$  im Inneren der Platte her, sodass im Raum vor der Platte keine reflektierte Welle existiert (Rechnung!).**

Reflexionsfrei bedeutet in diesem Ansatz:  $r_1 = 0$ . Daraus folgt (Setze (2) = (3)):

$$\frac{Z_0}{Z_2} (t_2 - r_2) = t_2 + r_2$$

$$t_2 \Gamma = r_2 \quad \text{mit } \Gamma = \frac{\frac{Z_0}{Z_2} - 1}{\frac{Z_0}{Z_2} + 1}. \quad (6)$$

Setze nun (4) in (5) ein, und ersetze nach (6). Danach tritt  $t_2$  in jedem Ausdruck auf und entfällt komplett. Übrig bleibt:

$$e^{-jk_{z2}b} - \Gamma e^{jk_{z2}b} = \frac{Z_2}{Z_0} (e^{-jk_{z2}b} + \Gamma e^{jk_{z2}b})$$

$$1 - \Gamma e^{j2k_{z2}b} = \frac{Z_2}{Z_0} (1 + \Gamma e^{j2k_{z2}b})$$

$$1 - \frac{Z_2}{Z_0} = \Gamma e^{j2k_{z2}b} \left(1 + \frac{Z_2}{Z_0}\right).$$

Setzt man  $\Gamma$  wieder ein, folgt:

$$e^{j2k_{z2}b} = 1.$$

Die 1 lässt sich als  $e^{j2n\pi}$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  darstellen. Damit folgt für die gesuchte Bedingung:

$$k_{z2}b = n\pi. \quad (7)$$

4. **Bestimmen Sie aus der oben gefundenen Bedingung eine Funktion  $\varepsilon_r(\omega, b)$ , sodass die Anordnung immer reflexionsfrei ist (Hinweis: sollten Sie in der vorigen Aufgabe keine Bedingung gefunden haben, benutzen Sie bitte:  $k_{z2} = \frac{n\pi}{b}$ ).**

Setzt man (1) und (7) ineinander ein, so folgt:

$$\frac{n\pi}{b} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_0 \varepsilon_r}.$$

Elementare Umformungen liefern:

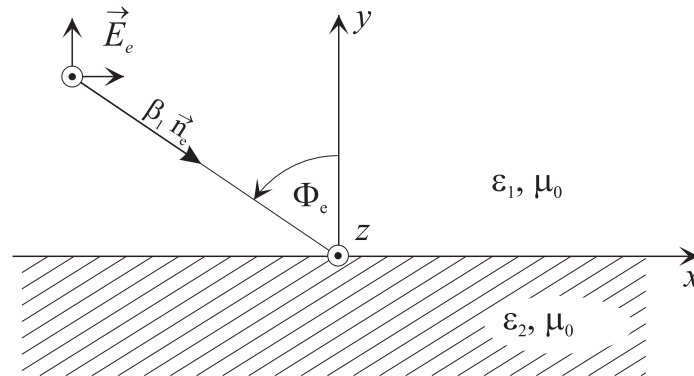
$$\varepsilon_r(\omega, b) = \frac{(n\pi)^2}{(\omega b)^2 \mu \varepsilon_0}.$$

5. **Begründen Sie anhand des Gleichungssystems aus Aufgabenteil 2, dass im Raumteil hinter der Platte immer eine Welle existiert, wenn nicht  $Z_2 = 0$  gilt. Für welches Material gilt dagegen  $Z_2 = 0$ ?**

Ist  $t_3 = 0$  folgt aus (4) dass  $t_2 = 0$  und  $r_2 = 0$  sein müssen. Dieser Zusammenhang führt in Gleichungen (2) und (3) auf den Widerspruch:  $r_1 = 1 \wedge r_1 = -1$ . Für PEC (**P**erfect **E**lectric **C**onducting) gilt:  $Z_2 = 0$ .

| Nr. | Punkte |
|-----|--------|
|     |        |

Eine Welle trifft aus dem Halbraum 1 unter dem Winkel  $\Phi_e$  zur Flächennormalen  $\vec{e}_y$  auf die Grenzfläche zum Halbraum 2.



Es gelte

$$\vec{E}_e(\vec{r}, t) = (E_{e,x}\vec{e}_x + E_{e,y}\vec{e}_y + E_{e,z}\vec{e}_z)e^{-j\beta_1\vec{n}_e\cdot\vec{r}} \quad |E_{e,z}| > 0. \quad (8)$$

1. In welchem Verhältnis müssen die Amplituden  $E_{e,x}$  und  $E_{e,y}$  stehen?

$\vec{E}$  muss senkrecht auf  $\vec{n}_e$  stehen.

$$\vec{n}_e = \begin{pmatrix} \sin \Phi_e \\ -\cos \Phi_e \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{E}_{e,x} \\ \underline{E}_{e,y} \\ \underline{E}_{e,z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \Phi_e \\ -\cos \Phi_e \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

$$\Rightarrow \underline{E}_{e,x} \sin \Phi_e = \underline{E}_{e,y} \cos \Phi_e \quad (11)$$

$$\Rightarrow \tan \Phi_e = \frac{\underline{E}_{e,y}}{\underline{E}_{e,x}} \quad (12)$$

2. Es gelte  $\Phi_e = 45^\circ$ . Welche Gleichungen müssen die Amplituden erfüllen, wenn die ebene Welle (a) linear, (b) zirkular und (c) elliptisch bezüglich der Ausbreitungsrichtung polarisiert sein soll?

Bei  $\Phi_e = 45^\circ$  gilt  $\tan \Phi_e = 1$  und daraus folgt  $\underline{E}_{e,x} = \underline{E}_{e,y}$ .

(a) linear:  $\sqrt{\underline{E}_{e,x}^2 + \underline{E}_{e,y}^2} = \underline{E}_{e,z}$  (in Phase)

(b) zirkular:  $\sqrt{\underline{E}_{e,x}^2 + \underline{E}_{e,y}^2} = \underline{E}_{e,z} e^{j\frac{\pi}{2}}$  (Betrag gleich, Phase  $\pi/2$ )

(c) elliptisch: z.B.:  $0.5\sqrt{\underline{E}_{e,x}^2 + \underline{E}_{e,y}^2} = \underline{E}_{e,z} e^{j\frac{\pi}{2}}$  (Betrag  $\neq$ , Phase nicht  $n\pi/2$ )

3. Stellen Sie alle Gleichungen für die Randbedingungen der ebenen Welle bei  $y = 0$  (für beliebige  $\Phi_e$ ) auf. Wie lauten Amplituden- und Phasenbedingungen? Vereinfachen Sie die Gleichungen der Randbedingungen soweit, dass keine Amplituden mehr darin auftreten!

$$\vec{E}_e(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \underline{E}_{e,x} \\ \underline{E}_{e,y} \\ \underline{E}_{e,z} \end{pmatrix} e^{-j\beta_1 \vec{n}_e \cdot \vec{r}} \quad \vec{E}_r(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \underline{E}_{r,x} \\ \underline{E}_{r,y} \\ \underline{E}_{r,z} \end{pmatrix} e^{-j\beta_1 \vec{n}_r \cdot \vec{r}} \quad \vec{E}_t(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \underline{E}_{t,x} \\ \underline{E}_{t,y} \\ \underline{E}_{t,z} \end{pmatrix} e^{-j\beta_2 \vec{n}_t \cdot \vec{r}} \quad (13)$$

$$\vec{H}_e(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \underline{H}_{e,x} \\ \underline{H}_{e,y} \\ \underline{H}_{e,z} \end{pmatrix} e^{-j\beta_1 \vec{n}_e \cdot \vec{r}} \quad \vec{H}_r(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \underline{H}_{r,x} \\ \underline{H}_{r,y} \\ \underline{H}_{r,z} \end{pmatrix} e^{-j\beta_1 \vec{n}_r \cdot \vec{r}} \quad \vec{H}_t(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \underline{H}_{t,x} \\ \underline{H}_{t,y} \\ \underline{H}_{t,z} \end{pmatrix} e^{-j\beta_2 \vec{n}_t \cdot \vec{r}} \quad (14)$$

$$\beta_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_1} \quad \beta_2 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_2} \quad (15)$$

$$\vec{H}_e = \frac{1}{Z_1} (\vec{n}_e \times \vec{E}_e) e^{-j\beta_1 \vec{n}_e \cdot \vec{r}} = \frac{1}{Z_1} \left( \begin{pmatrix} \sin \Phi_e \\ -\cos \Phi_e \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{E}_{e,x} \\ \underline{E}_{e,y} \\ \underline{E}_{e,z} \end{pmatrix} \right) e^{-j\beta_1 \vec{n}_e \cdot \vec{r}} \quad (16)$$

$$= \frac{1}{Z_1} \begin{pmatrix} -\cos \Phi_e \underline{E}_{e,z} \\ \sin \Phi_e \underline{E}_{e,z} \\ \cos \Phi_e \underline{E}_{e,x} + \sin \Phi_e \underline{E}_{e,y} \end{pmatrix} e^{-j\beta_1 \vec{n}_e \cdot \vec{r}} \quad (17)$$

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} \quad (18)$$

$$\vec{H}_r = \frac{1}{Z_1} (\vec{n}_r \times \vec{E}_r) e^{-j\beta_1 \vec{n}_r \cdot \vec{r}} = \frac{1}{Z_1} \left( \begin{pmatrix} \sin \Phi_r \\ \cos \Phi_r \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{E}_{r,x} \\ \underline{E}_{r,y} \\ \underline{E}_{r,z} \end{pmatrix} \right) e^{-j\beta_1 \vec{n}_r \cdot \vec{r}} \quad (19)$$

$$= \frac{1}{Z_1} \begin{pmatrix} \cos \Phi_e \underline{E}_{r,z} \\ -\sin \Phi_e \underline{E}_{r,z} \\ -\cos \Phi_e \underline{E}_{r,x} + \sin \Phi_e \underline{E}_{r,y} \end{pmatrix} e^{-j\beta_1 \vec{n}_r \cdot \vec{r}} \quad (20)$$

$$\Phi_r = \Phi_e \quad (21)$$

$$\vec{H}_t = \frac{1}{Z_2} (\vec{n}_t \times \vec{E}_t) e^{-j\beta_2 \vec{n}_t \cdot \vec{r}} = \frac{1}{Z_2} \left( \begin{pmatrix} \sin \Phi_t \\ -\cos \Phi_t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{E}_{t,x} \\ \underline{E}_{t,y} \\ \underline{E}_{t,z} \end{pmatrix} \right) e^{-j\beta_2 \vec{n}_t \cdot \vec{r}} \quad (22)$$

$$= \frac{1}{Z_2} \begin{pmatrix} -\cos \Phi_t \underline{E}_{t,z} \\ -\sin \Phi_t \underline{E}_{t,z} \\ \cos \Phi_t \underline{E}_{t,x} + \sin \Phi_t \underline{E}_{t,y} \end{pmatrix} e^{-j\beta_2 \vec{n}_t \cdot \vec{r}} \quad (23)$$

$$Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}} \quad (24)$$

Die Randbedingungen lauten

- (a)  $\vec{E}_{tan}$  stetig in der Ebene  $y = 0$ ,  
(b)  $\vec{H}_{tan}$  stetig in der Ebene  $y = 0$ .

Daraus ergeben sich

$$[\underline{E}_{e,x} e^{-j\beta_1 \vec{n}_e \cdot \vec{r}} + \underline{E}_{r,x} e^{-j\beta_1 \vec{n}_r \cdot \vec{r}}]_{y=0} = [\underline{E}_{t,x} e^{-j\beta_2 \vec{n}_t \cdot \vec{r}}]_{y=0} \quad (25)$$

$$[\underline{E}_{e,z} e^{-j\beta_1 \vec{n}_e \cdot \vec{r}} + \underline{E}_{r,z} e^{-j\beta_1 \vec{n}_r \cdot \vec{r}}]_{y=0} = [\underline{E}_{t,z} e^{-j\beta_2 \vec{n}_t \cdot \vec{r}}]_{y=0} \quad (26)$$

und

$$[\underline{H}_{e,x} e^{-j\beta_1 \vec{n}_e \cdot \vec{r}} + \underline{H}_{r,x} e^{-j\beta_1 \vec{n}_r \cdot \vec{r}}]_{y=0} = [\underline{H}_{t,x} e^{-j\beta_2 \vec{n}_t \cdot \vec{r}}]_{y=0} \quad (27)$$

$$[\underline{H}_{e,z} e^{-j\beta_1 \vec{n}_e \cdot \vec{r}} + \underline{H}_{r,z} e^{-j\beta_1 \vec{n}_r \cdot \vec{r}}]_{y=0} = [\underline{H}_{t,z} e^{-j\beta_2 \vec{n}_t \cdot \vec{r}}]_{y=0}. \quad (28)$$

Für die Amplituden gilt die Bedingung

$$E_{e,(\cdot)} + E_{r,(\cdot)} = E_{t,(\cdot)}. \quad (29)$$

Die Phasenbedingung lautet

$$\beta_1 \vec{n}_e \cdot \vec{r}|_{y=0} = \beta_1 \vec{n}_r \cdot \vec{r}|_{y=0} = \beta_2 \vec{n}_t \cdot \vec{r}|_{y=0}. \quad (30)$$

Aus der Gleichheit der ersten beiden Ausdrücke erhält man  $\Phi_e = \Phi_r$ .

Die elektrischen Stetigkeitsbedingungen vereinfachen sich unter Berücksichtigung der Phasenbedingung zu

$$\underline{E}_{e,x} + \underline{E}_{r,x} = \underline{E}_{t,x} \Rightarrow 1 + r_p = t_p \quad (31)$$

$$\underline{E}_{e,z} + \underline{E}_{r,z} = \underline{E}_{t,z} \Rightarrow 1 + r_s = t_s \quad (32)$$

Die magnetischen Stetigkeitsbedingungen vereinfachen sich unter Berücksichtigung der Phasenbedingung zu

$$Z_2(\underline{H}_{e,x} + \underline{H}_{r,x}) = Z_1 \underline{H}_{t,x} \quad (33)$$

$$\Rightarrow Z_2(-\underline{E}_{e,z} \cos \Phi_e + r_s \underline{E}_{e,z} \cos \Phi_e) = Z_1(-\cos \Phi_t t_s \underline{E}_{e,z}) \quad (34)$$

$$\Rightarrow Z_2(-\cos \Phi_e + r_s \cos \Phi_e) = -Z_1 t_s \cos \Phi_t \quad (35)$$

und

$$Z_2(\underline{H}_{e,z} + \underline{H}_{r,z}) = Z_1 \underline{H}_{t,z} \quad (36)$$

$$\Rightarrow Z_2(\underline{E}_{e,y} \sin \Phi_e + \underline{E}_{e,x} \cos \Phi_e + \underline{E}_{r,y} \sin \Phi_e - \underline{E}_{r,x} \cos \Phi_e) = Z_1(\underline{E}_{t,x} \cos \Phi_t + \underline{E}_{t,y} \sin \Phi_t).$$

Es gilt

$$\underline{E}_{e,y} = \underline{E}_{e,x} \tan \Phi_e, \quad \underline{E}_{r,y} = -\underline{E}_{r,x} \tan \Phi_e, \quad \underline{E}_{t,y} = \underline{E}_{t,x} \tan \Phi_e. \quad (37)$$

$$\Rightarrow Z_2(\tan \Phi_e \sin \Phi_e + \cos \Phi_e + r_p(-\tan \Phi_e \sin \Phi_e - \cos \Phi_e)) = Z_1(t_p \cos \Phi_t + \tan \Phi_t \sin \Phi_t). \quad (38)$$

In der Klausur nicht gefordert: Auflösen...

(32) eingesetzt in (35) liefert:

$$Z_2(-\cos \Phi_e + r_s \cos \Phi_e) = -Z_1(1 + r_s) \cos \Phi_t \quad (39)$$

$$\Rightarrow -Z_2 \cos \Phi_e + r_s Z_2 \cos \Phi_e = -Z_1 \cos \Phi_t - Z_1 r_s \cos \Phi_t \quad (40)$$

$$r_s = \frac{Z_2 \cos \Phi_e - Z_1 \cos \Phi_t}{Z_2 \cos \Phi_e + Z_1 \cos \Phi_t} \quad (41)$$

(31) eingesetzt in (38) liefert:

$$\frac{Z_2}{\cos \Phi_e} (1 + r_p \cdot (-1) \cdot 1) = \frac{Z_1}{\cos \Phi_t} ((1 + r_p) \cdot 1) \quad (42)$$

$$\Rightarrow \frac{Z_2 - Z_2 r_p}{\cos \Phi_e} = \frac{Z_1 + Z_1 r_p}{\cos \Phi_t} \quad (43)$$

$$\Rightarrow Z_2 \cos \Phi_t - r_p Z_2 \cos \Phi_t = Z_1 \cos \Phi_e - r_p Z_1 \cos \Phi_e \quad (44)$$

$$\Rightarrow r_p = \frac{Z_2 \cos \Phi_t - Z_1 \cos \Phi_e}{Z_2 \cos \Phi_t + Z_1 \cos \Phi_e} \quad (45)$$

4. (a) **Leiten Sie aus Ihrem vorigen Ergebnis das Brechungsgesetz ab.**

Aus der Gleichheit der beiden rechten Terme in der Phasenbedingung folgt sofort

$$\beta_1 [\vec{n}_r \cdot \vec{r}]_{y=0} = \beta_1 x \sin \Phi_r \quad (46)$$

$$\beta_2 [\vec{n}_t \cdot \vec{r}]_{y=0} = \beta_2 x \sin \Phi_t \quad (47)$$

$$\beta_1 \sin \varphi_e = \beta_2 \sin \Phi_t \quad (48)$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\sin \Phi_t}{\sin \Phi_e} \quad (49)$$

(b) **In welchen Fällen tritt Totalreflektion auf? Was gilt hierbei für  $\Phi_t$ ?**

$$\sin \Phi_e \frac{\beta_1}{\beta_2} = \sin \Phi_t > 1 \quad (50)$$

$$\Rightarrow \Phi_t \in \mathbb{C} \quad (51)$$

5. Die Lösungen der Gleichungen bezüglich der Reflektionsfaktoren lauten

$$r_p = \frac{Z_2 \cos \Phi_t - Z_1 \cos \Phi_e}{Z_2 \cos \Phi_t + Z_1 \cos \Phi_e} \quad r_s = \frac{Z_2 \cos \Phi_e - Z_1 \cos \Phi_t}{Z_2 \cos \Phi_e + Z_1 \cos \Phi_t} \quad (52)$$

**Zeigen Sie, welcher der beiden Reflektionsfaktoren beim Brewsterwinkel bei dieser Anordnung verschwindet. Was bedeutet dies für die Polarisation des dennoch reflektierten Anteils einer zirkular polarisierten Gesamtwelle?**

(a) p-Fall: Aus  $r_p = 0$  folgt:

$$Z_2 \cos \Phi_t = Z_1 \cos \Phi_e \quad (53)$$

Mit dem Brechungsgesetz erhält man den Ausdruck

$$\frac{\beta_2}{Z_2} \tan \Phi_t = \frac{\beta_1}{Z_1} \tan \Phi_e \quad (54)$$

$$\beta_1 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_1} \quad Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} \quad (55)$$

$$\beta_2 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_2} \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}} \quad (56)$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \Phi_e}{\tan \Phi_t} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (57)$$

D.h. in diesem Fall verschwindet der Reflektionsfaktor bei bestimmtem Einfallswinkel und Materialien.



(b) s-Fall: Aus  $r_s = 0$  folgt:

$$Z_2 \cos \Phi_e = Z_1 \cos \Phi_t \quad (58)$$

Mit dem Brechungsgesetz erhält man den Ausdruck

$$\frac{\beta_1}{Z_2} \tan \Phi_e = \frac{\beta_2}{Z_1} \tan \Phi_t \quad (59)$$

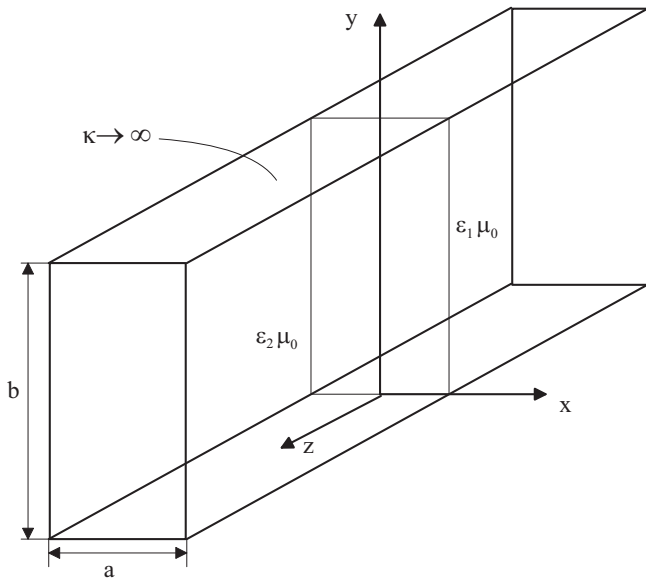
$$\Rightarrow \frac{\tan \Phi_e \sqrt{\mu_0 \varepsilon_2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}}{\tan \Phi_t \sqrt{\mu_0 \varepsilon_1} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}} \Rightarrow \frac{\mu_0}{\mu_0} \quad (60)$$

Kein Brewsterwinkel für rein dielektrischen Übergang!

Die reflektierte Welle ist linear polarisiert.

| Nr. | Punkte |
|-----|--------|
|     |        |

Gegeben ist ein rechteckförmiger Hohlleiter mit ideal leitender Berandung, s. Skizze. Der Raum  $z < 0$  des Hohlleiters ist mit einem Material der Permittivität  $\varepsilon_1$  gefüllt, der Raum  $z > 0$  ist mit einem Material der Permittivität  $\varepsilon_2$  gefüllt. Die Permeabilität der gesamten Anordnung sei  $\mu_0$ .



Abmessungen Hohlleiter:

- in  $x$ -Richtung:  
 $-a/2 < x < a/2$
- in  $y$ -Richtung:  
 $0 < y < b$  mit  $b = 2 \cdot a$

Zunächst gilt im gesamten Raum innerhalb des Hohlleiters  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ .

1. Bestimmen Sie das Dispersionsdiagramm (A-D) für den oben skizzierten Hohlleiter aus den nachfolgenden Diagrammen, siehe nächste Seite (Keine Mehrfachauswahl!). Begründen Sie kurz Ihre Wahl.

Abbildung 2: B da:

- Rechteckhohlleiter kein TEM,
- $x$ -Achse: Frequenz,  $y$ -Achse:  $k_z$ ,
- $k_z = 0$  für  $f < f_c$

2. Wie lautet die Dispersionsgleichung für den oben dargestellten Hohlleiter.

$$\omega^2 \mu \varepsilon_1 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

3. Bestimmen Sie den Grundmode und geben Sie den Frequenzbereich an, bei dem nur der Grundmode ausbreitungsfähig ist. Kennzeichnen Sie diesen Bereich im ausgewählten Dispersionsdiagramm.

- Grundmode  $TE_{01}$  da  $\pi/a > \pi/b \rightarrow f_{10} > f_{01}$
- Kennzeichnung im Bild
- $c_1/(4a) < f < c_1/(2a)$  mit  $c_1 = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1}$

4. Bestimmen Sie die ersten entarteten Moden des Hohlleiters (Mit Begründung).

Erster entarteter Mode:

$$TE_{10} = TE_{02} \text{ da } b = 2 \cdot a$$

$$\text{mit } f_{10} = f_{02}$$

5. Nun wird der Frequenzbereich so gewählt, dass die Moden  $TE_{10}$  und  $TE_{01}$  ausbreitungsfähig sind. Wählen Sie einen geeigneten Vektorpotentialansatz und bestimmen Sie daraus die elektrischen und magnetischen Feldgrößen der beiden Moden so, dass sich die Moden in positiver  $z$ -Richtung ausbreiten.

Verschiebener Ansatz Vektorpotential  $x \rightarrow x - a/2$  um Randbedingung  $E_y(x = \pm a/2) = 0$  zu erfüllen.

$$\vec{A}(x, y, z) = \begin{Bmatrix} C_1 \sin(k_x(x - \frac{a}{2})) \\ C_2 \cos(k_x(x - \frac{a}{2})) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} C_3 \sin(k_y y) \\ C_4 \cos(k_y y) \end{Bmatrix} e^{-jk_z z} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{E} = \text{rot} \vec{A}_z(x, y, z)$$

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix}$$

$$E_y = -\frac{dA_z}{dx} = -k_x \begin{Bmatrix} C_1 \cos(k_x(x - \frac{a}{2})) \\ -C_2 \sin(k_x(x - \frac{a}{2})) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} C_3 \sin(k_y y) \\ C_4 \cos(k_y y) \end{Bmatrix} e^{-jk_z z}$$

$$E_x = \frac{dA_z}{dy} = k_y \begin{Bmatrix} C_1 \sin(k_x(x - \frac{a}{2})) \\ C_2 \cos(k_x(x - \frac{a}{2})) \end{Bmatrix} k_y \begin{Bmatrix} C_3 \cos(k_y y) \\ -C_4 \sin(k_y y) \end{Bmatrix} e^{-jk_z z}$$

Randbedingungen:

$$E_y(x = -a/2) = E_y(x = +a/2) = 0 \rightarrow C_1 = 0, k_x = \frac{\pi}{a}$$

$$E_x(y = 0) = E_x(y = b) = 0 \rightarrow C_3 = 0, k_y = \frac{\pi}{b}$$

Damit gilt für das Vektorpotential:

$$\vec{A}(x, y, z) = C \sin\left(k_x\left(x - \frac{a}{2}\right)\right) \cos(k_y y) e^{-jk_z z} \cdot \vec{e}_z.$$

Für  $TE_{10}$

$$k_x = \frac{\pi}{a}; k_y = 0$$

$$\vec{E}_{10} = C_{10} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-jk_z z} \cdot \vec{e}_y$$

$$C_{10} = -\frac{\pi}{a}C$$

Für das  $H$ -Feld gilt

$$\vec{H}_{10} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \text{rot} \vec{E}$$

$$\text{rot}(\vec{E} \cdot \vec{e}_y) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{rot}(\vec{E} \cdot \vec{e}_y) = -\frac{dE_y}{dz} \vec{e}_x + \frac{dE_y}{dx} \vec{e}_z$$

$$H_{10} = -\frac{C_{10}}{j\omega\mu_0} \left( jk_z \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \vec{e}_x - \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \vec{e}_z \right) e^{-jk_z z}$$

Für  $TE_{01}$

$$k_y = \frac{\pi}{b}, \quad k_x = 0$$

$$\vec{E}_{01} = C_{01} \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) e^{-jk_z z} \cdot \vec{e}_x$$

$$C_{01} = -\frac{\pi}{b}C$$

Für das  $H$ -Feld gilt

$$\vec{H}_{01} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \text{rot} \vec{E}$$

$$\text{rot}(E \cdot \vec{e}_x) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ d/dx & d/dy & d/dz \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{rot}(E \cdot \vec{e}_x) = \frac{dE_x}{dz} \vec{e}_y - \frac{dE_x}{dy} \vec{e}_z$$

$$H_{01} = \frac{C_{01}}{j\omega\mu_0} \left( -\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) jk_z \vec{e}_y - \frac{\pi}{b} \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) \vec{e}_z \right) e^{-jk_z z}$$

$$H_{01} = -\frac{C_{01}}{j\omega\mu_0} \left( jk_z \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \vec{e}_y + \frac{\pi}{b} \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) \vec{e}_z \right) e^{-jk_z z}$$

6. Bestimmen Sie den gesamten Leistungsfluss durch eine beliebige Fläche  $z = \text{konstant}$ . Hierbei sind nur die beiden Moden  $TE_{10}$  und  $TE_{01}$  zu berücksichtigen.

$$N = \Re \left\{ \int_A \vec{S} d\vec{A} \right\}$$

$$d\vec{A} = \vec{e}_z dx dy$$

Bedingt durch Modenorthogonalität

$$N = \Re \left\{ \int_{-a/2}^{a/2} \int_0^b \frac{1}{2} (\vec{E}_{10} \times \vec{H}_{10}^* + \vec{E}_{01} \times \vec{H}_{01}^*) \vec{e}_z dy dx \right\}$$

mit

$$(\vec{E}_{10} \times \vec{H}^*_{10}) \cdot \vec{e}_z = E_{10x} \cdot H^*_{10y} = -\frac{|C_{10}|^2 k_z}{\omega \mu} \cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$(\vec{E}_{01} \times \vec{H}^*_{01}) \cdot \vec{e}_z = -E_{01y} \cdot H^*_{01x} = \frac{|C_{01}|^2 k_z}{\omega \mu} \sin^2\left(\frac{\pi}{b}y\right)$$

$$N = \frac{1}{2} \Re \left\{ \int_{-a/2}^{a/2} \int_0^b -\frac{|C_{10}|^2 k_z}{\omega \mu} \cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \frac{|C_{01}|^2 k_z}{\omega \mu} \sin^2\left(\frac{\pi}{b}y\right) dy dx \right\}$$

$$N = \frac{abk_z}{4\omega\mu} (|C_{10}|^2 - |C_{01}|^2)$$

$$N = \frac{abk_z}{4\omega\mu} \left( \frac{\pi^2}{b^2} |C_4|^2 - \frac{\pi^2}{a^2} |C_1|^2 \right)$$

$$N = \frac{abk_z}{4\omega\mu} \left( \frac{\pi^2}{4a^2} |C_4|^2 - \frac{\pi^2}{a^2} |C_1|^2 \right)$$

$$N = \frac{abk_z}{4\omega\mu} \frac{\pi^2}{a^2} \left( \frac{1}{4} |C_4|^2 - |C_1|^2 \right)$$

Nun wird der Bereich  $z > 0$  mit einem Material der Permittivität  $\varepsilon_2$  gefüllt.

7. Bestimmen Sie  $\varepsilon_2$  so, dass nun nur der Grundmode im Raum  $z > 0$  des Hohlleiters ausbreitungsfähig ist.

Allgemein gilt:

$$\sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k_x^2 - k_y^2} = k_z$$

Für Wellenführung in  $z$ -Richtung muss gelten:

$$\omega^2 \mu \varepsilon - k_x^2 - k_y^2 > 0$$

$$\text{damit } k_z \in \mathbb{R}$$

Hier soll  $TE_{01}$  geführt werden und  $TE_{10}$  nicht geführt werden, für  $TE_{01}$  gilt:

$$k_x = 0; k_y = \frac{\pi}{b}$$

$$\omega^2 \mu \varepsilon_2 - k_y^2 > 0$$

für  $TE_{10}$  gilt:

$$k_x = \frac{\pi}{2a}; k_y = 0$$

$$\omega^2 \mu \varepsilon_2 - k_x^2 < 0$$

Daraus folgt dann die Bedingung für  $\varepsilon_2$

$$\frac{k_x^2}{\omega^2 \mu} > \varepsilon_2 > \frac{k_y^2}{\omega^2 \mu}$$

$$\frac{\pi^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\omega^2 \mu} > \varepsilon_2 > \frac{\pi^2}{(2a)^2} \cdot \frac{1}{\omega^2 \mu}$$

$$\frac{\pi^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\omega^2 \mu} > \varepsilon_2 > \frac{\pi^2}{4a^2} \cdot \frac{1}{\omega^2 \mu}$$

Anderer Ansatz

Für  $TE_{10}$  gilt

$$\omega_1^2 \mu \varepsilon_1 > \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \quad \text{Wellenführung für } z < 0$$

$$\omega_1^2 \mu \varepsilon_2 < \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \quad \text{keine Wellenführung für } z > 0$$

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$$

Für  $TE_{01}$  gilt

$$\omega_2^2 \mu \varepsilon_1 > \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 = \frac{\pi^2}{b^2} \quad \text{Wellenführung für } z < 0$$

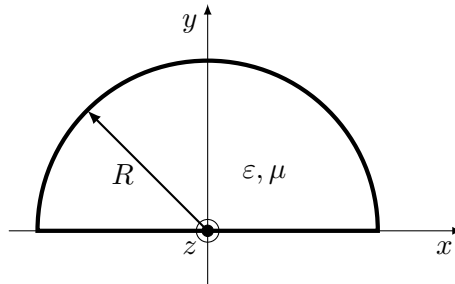
$$\omega_2^2 \mu \varepsilon_2 > \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 \quad \text{Wellenführung für } z > 0$$

$$\varepsilon_2 > \frac{\pi^2}{4a^2 \omega_2^2 \mu}$$

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \frac{\pi^2}{4a^2 \omega_2^2 \mu}$$

| Nr. | Punkte |
|-----|--------|
|     |        |

Gegeben sei ein idealer Hohlleiter mit dem abgebildeten Querschnitt in Form eines Halbkreises.



a) Bestimmen Sie die Feldgrößen und die Cut-Off-Frequenz des Grundmodes.

**Hinweis:** Formelsammlung im Anhang beachten!

Mit Hilfe der Formelsammlung im Anhang kann ein  $z$ -gerichtetes Vektorpotential wie folgt angegeben werden.

$$A_z = C J_m(K\rho) \begin{cases} \sin(m\varphi) \\ \cos(m\varphi) \end{cases} e^{\mp j k_z z} \quad (61)$$

Alle anderen Kombinationen erfüllen die Randbedingungen in  $\rho = R$  nicht ( $K = 0$ ) oder sind im Koordinatenursprung singulär ( $N_m(K\rho)$ ). Die elektrische Feldstärke berechnet sich gemäß:

$$\vec{E} = \text{rot} \vec{A} = \vec{e}_\rho \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \vec{e}_\varphi \frac{\partial A_z}{\partial \rho}. \quad (62)$$

In den Flächen  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \pi$  muss die  $\rho$ -Komponente der elektrischen Feldstärke gleich Null sein. Damit entfällt im Ansatz des Vektorpotentials die Sinus-Funktion.

$$\vec{E} = C \left( -\vec{e}_\rho \frac{m}{\rho} J_m(K\rho) \sin(m\varphi) - \vec{e}_\varphi K J'_m(K\rho) \cos(m\varphi) \right) e^{\mp j k_z z} \quad (63)$$

Die kleinste Nullstelle einer Ableitung der Besselfunktionen  $J_m$  hat die Ordnung  $m = 1$ . Die Randbedingungen in  $\varphi = \pi$  sind für  $m = 1$  ebenfalls erfüllt. Der Grundmode ist wie beim Rundhohlleiter der  $TE_{11}$ -Mode, mit

$$K = \frac{j'_{11}}{R} \quad \text{und} \quad k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - K^2. \quad (64)$$

Demnach ergibt sich die Cut-Off-Frequenz zu

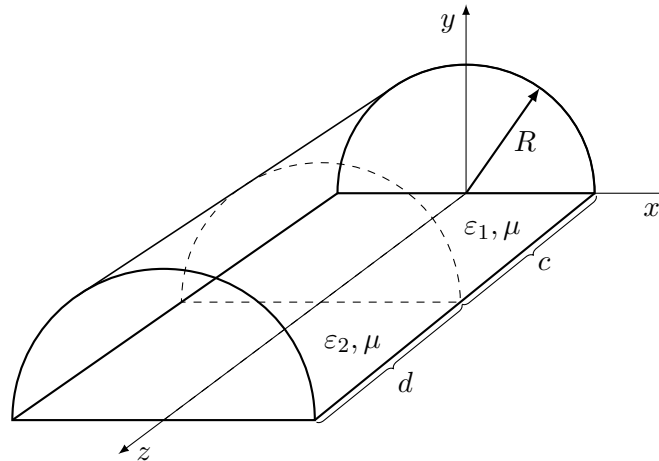
$$k_z^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \frac{K}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{j'_{11}}{R \sqrt{\mu \varepsilon}}. \quad (65)$$

Die magnetische Feldstärke folgt aus:

$$\vec{H} = \frac{-1}{j\omega\mu} \text{rot} \vec{E} = \frac{-1}{j\omega\mu} \left( -\vec{e}_\rho \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} + \vec{e}_\varphi \frac{\partial E_\rho}{\partial z} + \vec{e}_z \left( \frac{\partial(\rho E_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi} \right) \right). \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \vec{H} = \frac{-C}{j\omega\mu} & \left( \vec{e}_\rho (\mp j k_z) K J'_m(K\rho) \cos(m\varphi) - \vec{e}_\varphi (\mp j k_z) \frac{m}{\rho} J_m(K\rho) \sin(m\varphi) \right. \\ & \left. + \vec{e}_z \left( -K J'_m(K\rho) - K^2 J''_m(K\rho) + \frac{m^2}{\rho} J_m(K\rho) \right) \cos(m\varphi) \right) e^{\mp j k_z z}. \quad (67) \end{aligned}$$

Aus zwei Abschnitten eines solchen Wellenleiters wird ein Resonator gebaut. Der Resonator ist an seinen Enden bei  $z = 0$  und  $z = c + d$  ideal leitend abgeschlossen. Der Raum  $0 < z < c$  ist mit Material der Permittivität  $\varepsilon_1$  gefüllt und der Raum  $c < z < d$  mit Material der Permittivität  $\varepsilon_2$ . Die Permeabilität ist im gesamten Raum gleich  $\mu$ .



b) Ermitteln Sie die Eigenwertgleichung zur Bestimmung der Resonanzfrequenzen des Resonators.

Es wird in jedem Raumteil (Index 1 oder 2) eine Überlagerung zweier Wellen angesetzt, wobei eine in positiver  $z$ -Richtung propagiert (Amplitude  $C^+$ ), und die andere in negativer  $z$ -Richtung (Amplitude  $C^-$ ).

In  $z = 0$  und  $z = e = c + d$  muss die tangentielle elektrische Feldstärke gleich Null sein. Es folgt:

$$C_1^+ = -C_1^- \quad \text{und} \quad C_2^+ e^{-jk_{z2}e} = -C_2^- e^{jk_{z2}e} \quad (68)$$

In  $z = c$  muss die tangentielle elektrische Feldstärke stetig sein.

$$C_1^+ e^{-jk_{z1}c} + C_1^- e^{+jk_{z1}c} = C_2^+ e^{-jk_{z2}c} + C_2^- e^{+jk_{z2}c} \quad (69)$$

Gleiches gilt für die tangentielle magnetische Feldstärke.

$$k_{z1} \left( C_1^+ e^{-jk_{z1}c} - C_1^- e^{+jk_{z1}c} \right) = k_{z2} \left( C_2^+ e^{-jk_{z2}c} - C_2^- e^{+jk_{z2}c} \right) \quad (70)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (68) werden in (69) und (70) die Amplituden der rücklaufenden Wellen substituiert.

$$C_1^+ \left( e^{-jk_{z1}c} - e^{+jk_{z1}c} \right) = C_2^+ \left( e^{-jk_{z2}c} - e^{-j2k_{z2}e} e^{+jk_{z2}c} \right) \quad (71)$$

$$k_{z1} C_1^+ \left( e^{-jk_{z1}c} + e^{+jk_{z1}c} \right) = k_{z2} C_2^+ \left( e^{-jk_{z2}c} + e^{-j2k_{z2}e} e^{+jk_{z2}c} \right) \quad (72)$$

Bildet man den Quotienten diese beiden Gleichungen erhält man die Eigenwertgleichung.

$$\frac{(e^{-jk_{z1}c} - e^{+jk_{z1}c})}{k_{z1} (e^{-jk_{z1}c} + e^{+jk_{z1}c})} = \frac{(e^{+jk_{z2}e} e^{-jk_{z2}c} - e^{-jk_{z2}e} e^{+jk_{z2}c})}{k_{z2} (e^{+jk_{z2}e} e^{-jk_{z2}c} + e^{-jk_{z2}e} e^{+jk_{z2}c})} \quad (73)$$

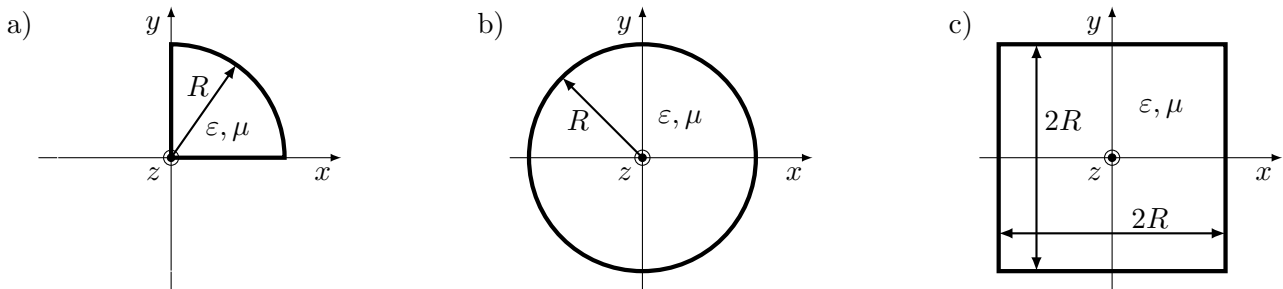
Eine etwas kompaktere Darstellung ist die Folgende.

$$-\frac{k_{z2}}{k_{z1}} \tan(k_{z1}c) = \tan(k_{z2}d) \quad (74)$$



Mit Hilfe der Beziehung (64) können  $k_{z1}$  und  $k_{z2}$  substituiert werden, und Lösungen für die Frequenz  $\omega$  gesucht werden.

Nehmen Sie an, anstelle des Halbkreishohlleiters werden die unten abgebildeten Hohlleiter a), b) oder c) verwendet, um den Resonator zu bauen.



Geben Sie qualitativ an, wie sich die Felder und die Cut-Off-Frequenz des Grundmodes ändern. Welchen Einfluss haben diese Änderungen auf die Eigenwertgleichung und auf deren Lösungen, den Resonanzfrequenzen.

Die Form der Eigenwertgleichungen (74) bleibt in allen drei Fällen gleich. Im Allgemeinen ändern sich jedoch die Frequenzabhängigkeit (Dispersionsbeziehung) der Phasenkonstanten  $k_{z1/2}$ . Eine Ausnahme bildet der zweite Fall b). Das Feldbild des  $TE_{11}$ -Mode kann durch Spiegelung an der  $x$ -Achse aus dem Feld des Halbkreishohlleiters bestimmt werden. Die Dispersionsbeziehungen sind identisch und damit auch die Resonanzfrequenzen.

Im Viertelkreishohlleiter a) können keine Feldlösungen nach obiger Rechnung mit  $m = 1$  existieren. Das Feldbild des Grundmodes ändert sich somit. Da eine Entartung der jeweiligen Moden nicht in Frage kommt ändert sich auch die Dispersionsbeziehung des Grundmodes. Die Cut-Off-Frequenz ist größer als zuvor und es stellen sich andere Resonanzfrequenzen ein.

Das Feldbild des Grundmodes im quadratischen Hohlleiter c) "ähneln" zwar dem Grundmode des Rundhohlleiters, ist letztlich jedoch unterschiedlich. Dem entsprechend ändern sich auch die Dispersionsbeziehungen und die Resonanzfrequenzen. Da der Grundmode entartet ist, wird im folgenden beispielhaft der  $TE_{10}$  betrachtet. Es gilt:

$$k_x = \frac{\pi}{2R} < \frac{1.841}{R} = \frac{j'_{11}}{R} = K \quad (75)$$

Die Cut-Off-Frequenz des Grundmodes ist somit kleiner als zuvor.

Anhang:

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{-1}{j\omega\mu} \frac{1}{\varrho} \left( \frac{\partial(\varrho E_\varphi)}{\partial\varrho} - \frac{\partial E_\varrho}{\partial\varphi} \right) = \frac{1}{j\omega\mu} \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial A_z}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial\varphi^2} \right) \\ &= \frac{-1}{j\omega\mu} \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \right) = \frac{-1}{j\omega\mu} (-k_z^2 A_z + k^2 A_z) = \frac{-K^2}{j\omega\mu} A_z \end{aligned} \quad (76)$$

| Nr. | Punkte |
|-----|--------|
|     |        |