UNIVERSITÄT PADERBORN
Fakultät EIM
Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik
Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik
Prof. Dr.-Ing. R. Schuhmann

Klausur TET A

31. Juli 2008

Name:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

Prüfungsnr.:

Aufgabe	1	2	3	4	HÜ	Summe
Punkte						

Theoretische Elektrotechnik
Universität Paderborn
Prof. Dr.–Ing. R. Schuhmann

1. Leiten Sie die eindimensionale Wellengleichung ($\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$) für die elektrische Feldstärke im Frequenzbereich aus den Maxwellschen Gleichungen her. Lassen Sie auch Verluste zu.

2. Zeigen Sie, dass

$$\underline{\vec{E}}(z) = (\vec{e}_x E_0\, e^{j\Phi_0} + \vec{e}_y E_1\, e^{j\Phi_1})\, e^{-j\underline{k}z} \qquad \text{mit} \quad \{E_0, E_1, \Phi_0, \Phi_1\} \in \mathbb{R}$$

   Lösung der Wellengleichung ist und bestimmen Sie $\underline{k}$ in Abhängigkeit der Materialparameter.

Es wird zunächst der verlustfreie Fall ($k \in \mathbb{R}$) betrachtet.

3. Berechnen Sie die zeitabhängige elektrische Feldstärke sowie den Poyntingschen Vektor im Zeit- und Frequenzbereich.

4. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit der obige Ansatz eine

   a.) linear

   b.) zirkular

   polarisierte Welle repräsentiert.

Der Halbraum $z > c$ sei nun verlustbehaftet mit $\kappa > 0$. Permittivität und Permeabilität bleiben im gesamten Raum konstant.

5. Die zirkular polarisierte Welle aus 4b) trifft auf den leitenden Halbraum. Die Konstanten E_0, E_1, Φ_0 und Φ_1 können im Rahmen der Annahmen aus 4b) frei gewählt werden. Berechnen Sie das elektrische Feld im gesamten Raum.

6. Skizzieren Sie qualitativ den Betrag der komplexen Amplitude der elektrischen Feldstärke in Abhängigkeit der z-Koordinate für die Fälle:

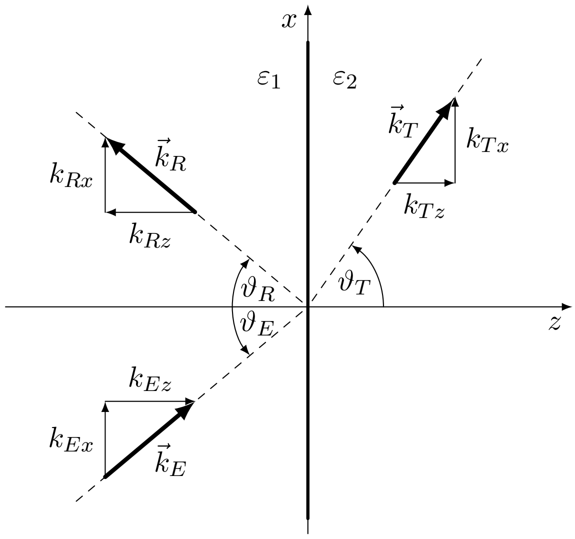
   a) $\kappa = 0$

   b) $\kappa > 0$

   c) $\kappa \to \infty$

Nr.	Punkte

Betrachtet wird der schräge Einfall einer ebenen Welle auf einen Halbraum mit unterschiedlicher Permittivität ($\varepsilon_1 \to \varepsilon_2$). Die Permeabilität ist konstant gleich μ. Der gesamte Raum ist nichtleitend. Die Feldlösung sei bekannt:



$$\underline{\vec{E}}_E = \vec{e}_y\, \underline{E}_{E0}\, e^{-j\vec{k}_E\vec{r}}, \qquad \vec{k}_E = k_1\vec{e}_E = k_{Ex}\vec{e}_x + k_{Ez}\vec{e}_z$$

$$\underline{\vec{E}}_R = \vec{e}_y\, \underline{E}_{R0}\, e^{-j\vec{k}_R\vec{r}}, \qquad \vec{k}_R = k_1\vec{e}_R = k_{Rx}\vec{e}_x + k_{Rz}\vec{e}_z$$

$$\underline{\vec{E}}_T = \vec{e}_y\, \underline{E}_{T0}\, e^{-j\vec{k}_T\vec{r}}, \qquad \vec{k}_T = k_2\vec{e}_T = k_{Tx}\vec{e}_x + k_{Tz}\vec{e}_z$$

mit $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu}$ und $k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu}$ sowie

$$\underline{E}_{T0} = t\underline{E}_{E0} \quad \text{mit} \quad t = \frac{2k_{Ez}}{k_{Ez} + k_{Tz}}$$

und

$$\underline{E}_{R0} = r\underline{E}_{E0} \quad \text{mit} \quad r = \frac{k_{Ez} - k_{Tz}}{k_{Ez} + k_{Tz}}.$$

1. Welche Stetigkeitsbedingungen müssen in $z = 0$ erfüllt sein? Bestätigen Sie durch kurze Rechnung die bekannten Beziehungen

$$\vartheta_R = \vartheta_E \quad \text{und} \quad \sqrt{\varepsilon_1}\sin\vartheta_E = \sqrt{\varepsilon_2}\sin\vartheta_T.$$

2. Existiert für die gegebene Polarisation der Brewsterwinkel? Begründen Sie kurz. Welche Änderungen der Geometrie oder des Materials sind nötig, damit der Brewsterwinkel (nicht) existiert?

Im folgenden soll der Fall der Totalreflektion betrachtet werden.

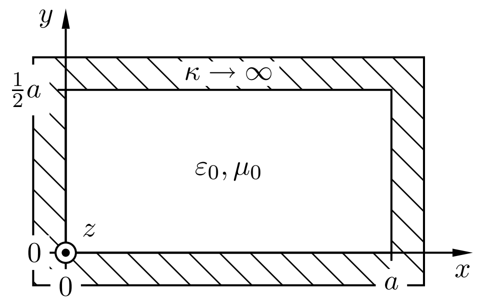
3. Welcher Bedingung müssen die Permittivitäten genügen, damit der Fall der Totalreflektion eintreten kann? Bestimmen Sie den Winkel $\vartheta_E = \vartheta_c$, ab dem Totalreflektion herrscht.
4. Zeigen Sie, dass $r = e^{j\Phi_0}$ gilt und bestimmen Sie Φ_0.
5. Berechnen Sie den komplexen Poyntingschen Vektor im gesamten Raum. Interpretieren Sie das Ergebnis.
6. An welchen Stellen $z = d < 0$ kann eine perfekt leitende Wand eingefügt werden, ohne dass Feld in $z > d$ zu verändern?
7. Skizzieren Sie für zwei beliebige unterschiedliche d den Betrag der komplexen Amplitude der elektrischen Feldstärke in Abhängigkeit der z-Koordinate.

Nr.	Punkte

Klausur TET A
Aufgabe 3

Theoretische Elektrotechnik
Universität Paderborn
Prof. Dr.–Ing. R. Schuhmann

Im nebenstehenden Bild ist der Querschnitt eines in z-Richtung unendlich ausgedehnten Rechteckhohlleiters dargestellt. Im Folgenden sollen ausschließlich **TE-Wellen** betrachtet werden, die sich in positive z-Richtung ausbreiten.



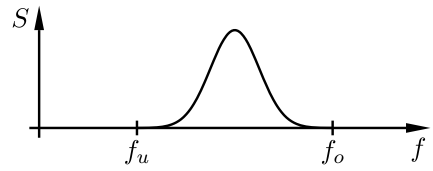
Für diesen Fall lautet die Lösung der Wellengleichung:

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \underline{C}\,[k_y \cos(k_x x)\sin(k_y y)\vec{e}_x - k_x \sin(k_x x)\cos(k_y y)\vec{e}_y]\exp(-jk_z z)\,,$$

mit der Separationsgleichung $\omega^2\mu_0\varepsilon_0 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ und der Integrationskonstanten $\underline{C}$.

1. Nennen Sie **alle** Randbedingungen, die die elektrische Feldstärke erfüllen muss. Bestimmen Sie daraus die Separationskonstanten k_x und k_y.
2. Geben Sie anhand des Ergebnisses aus Aufgabenteil 1) die Dispersionsgleichung $k_z(f)$ an und leiten Sie daraus einen Ausdruck für die Grenzfrequenz **aller** TE-Eigenmoden ab. Was gibt die Grenzfrequenz an?
3. Welches ist die TE-Grundwelle dieser Anordnung? Skizzieren Sie die elektrische Feldstärkeverteilung in der Querschnittsebene des Wellenleiters.
4. Skizzieren Sie den Verlauf der Wellenzahl k_z in Abhängigkeit von der Frequenz f für folgende Moden: TE_{10}, TE_{01}, TE_{11}, TE_{20}, TE_{02}.
   Berechnen Sie zuerst deren Grenzfrequenzen und kennzeichnen Sie diese in Ihrem Graphen.

Nebenstehend ist das Frequenzspektrum eines Signals dargestellt, welches mittels des oben gezeigten Wellenleiters über eine große Strecke übertragen werden soll. Die untere bzw. obere Grenzfrequenz des Signals ist $f_u = 10\,\text{GHz}$ bzw. $f_o = 15\,\text{GHz}$.



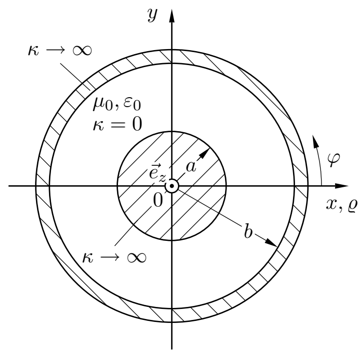
5. Der Wellenleiter soll so dimensioniert werden, dass eine Übertragung des vorgegebenen Signales ohne Auftreten von Mehrfachmodendispersion möglich ist. Geben Sie den **Wertebereich** für die Innenabmessung a in der Form $a_{\min} \le a \le a_{\max}$ an. Drücken Sie Ihr Ergebnis in **Zahlenwerten** aus.

   Hinweis: $c_0 = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Nr.	Punkte

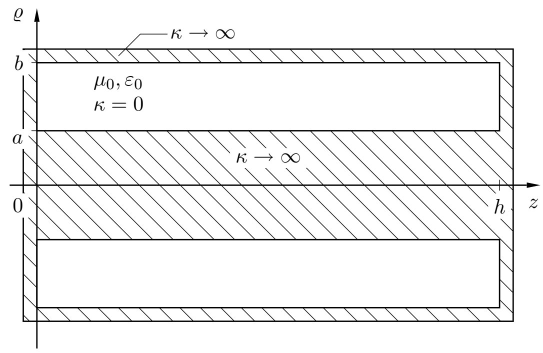
Theoretische Elektrotechnik
Universität Paderborn
Prof. Dr.–Ing. R. Schuhmann

Gegeben sei eine längshomogene verlustlose Koaxialleitung. Im Folgenden soll die Leitung mit einem zeitharmonischen Signal der Kreisfrequenz ω so angeregt werden, dass sich nur die **Grundwelle** (TEM-Mode) in positive z-Richtung ausbreiten kann.



1. Bestimmen Sie die magnetische und elektrische Feldstärke im Frequenzbereich. Die Amplitude der elektrischen Feldstärke soll dabei an der Stelle $\varrho = a$ und $z = 0$ den Wert E_0 aufweisen.
2. Skizzieren Sie die elektrischen und magnetischen Feldlinien im Querschnitt des Wellenleiters. Wie groß ist die Grenzfrequenz der Grundwelle?
3. Leiten Sie aus der elektrischen Feldverteilung die Spannung $\underline{U}(z)$ zwischen dem Innen- und dem Außenleiter und aus dem magnetischen Feld den Strom $\underline{I}(z)$ im Innenleiter ab. Geben Sie zusätzlich den Leitungswellenwiderstand $\underline{Z}_\mathrm{L}$ an.
4. Wie groß ist die durch den Koaxialleiter im zeitlichen Mittel transportierte Leistung $\bar{P}$?

Der Wellenleiter soll nun an den Enden mit einem ideal leitfähigen Rand abgeschlossen werden, so dass ein verlustfreier Hohlraumresonator resultiert.



5. Welche zusätzliche Randbedingung muss die elektrische Feldstärke erfüllen?
6. Geben Sie ausgehend von der Lösung aus Aufgabenteil 1) einen Ansatz für die TEM-Eigenmoden des Resonators an und bestimmen Sie daraus die elektrische und magnetische Feldstärke.
7. Welche Werte kann die **Wellenzahl** k_0 und daraus abgeleitet die **Frequenz** f und die **Wellenlänge** λ der in diesem Resonator schwingenden Grundwelle (TEM-Eigenmoden) annehmen?
8. Skizzieren Sie qualitativ den örtlichen Verlauf der Amplitude der elektrischen und magnetischen Feldstärke an der Stelle $\varrho = a$ im Bereich $0 \leq z \leq h$ für die Eigenmode mit der **niedrigsten** Eigenfrequenz.

Hinweis: Formelsammlung im Anhang beachten!

Nr.	Punkte

Theoretische Elektrotechnik
Universität Paderborn
Prof. Dr.–Ing. R. Schuhmann

Vektoranalytische Formeln:

- Determinantenformel für kartesische Koordinaten: $\operatorname{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$

- In Zylinderkoordinaten gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{A} &= \vec{e}_\varrho \left\{ \frac{1}{\varrho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right\} + \vec{e}_\varphi \left\{ \frac{\partial A_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \varrho} \right\} + \frac{\vec{e}_z}{\varrho} \left\{ \frac{\partial(\varrho A_\varphi)}{\partial \varrho} - \frac{\partial A_\varrho}{\partial \varphi} \right\} \\
\operatorname{grad}\Phi &= \vec{e}_\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\
\operatorname{div}\vec{A} &= \frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho A_\varrho)}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\Delta\Phi &= \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\left\{ \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \right\} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

- Allgemein gilt: $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta$

Verschiedenes:

- $\sin(x) = \dfrac{\exp(jx) - \exp(-jx)}{2j}$