

UNIVERSITÄT PADERBORN

Fakultät EIM

Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik

Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik

Prof. Dr.-Ing. R. Schuhmann

Klausur Theoretische Elektrotechnik A

LÖSUNGSVORSCHLAG

04. März 2009

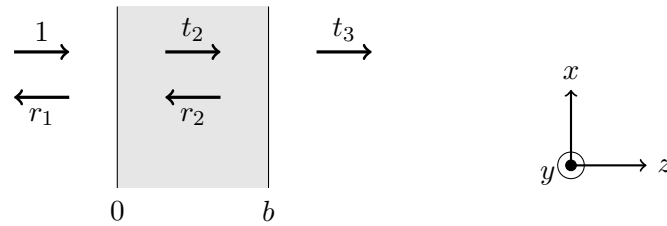
Name:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

Prüfungsnr.:

Aufgabe	1	2	3	4	HÜ	Summe
Punkte						



1. Geben Sie den Feldwellenwiderstand Z_2 sowie die Wellenzahl k_2 im Inneren der Platte in Abhängigkeit von μ_2 an. Welche physikalischen Einheiten haben μ_r und μ_0 ?

Wellenzahl, Feldwellenwiderstand und Einheiten nach Skript:

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon} \quad (1)$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon}}$$

Die Einheit von μ_0 ist $\frac{Vs}{Am}$, die relative Permeabilität ist einheitenlos.

2. Geben Sie für alle Raumteile einen Ansatz für die elektrische wie auch magnetische Feldstärke an. Leiten sie aus den Stetigkeitsbedingungen ein Gleichungssystem für die Reflexions- und Transmissionsfaktoren ab.

Ansätze für alle drei Raumteile (Skript Kapitel 7.3.2):

$$E_{y1} = E_0 \left(e^{-jk_1 z} + r_1 e^{jk_1 z} \right)$$

$$E_{y2} = E_0 \left(t_2 e^{-jk_2 z} + r_2 e^{jk_2 z} \right)$$

$$E_{y3} = E_0 \left(t_3 e^{-jk_3(z-b)} \right)$$

$$H_{x1} = -\frac{E_0}{Z_1} \left(e^{-jk_1 z} - r_1 e^{jk_1 z} \right)$$

$$H_{x2} = -\frac{E_0}{Z_2} \left(t_2 e^{-jk_2 z} - r_2 e^{jk_2 z} \right)$$

$$H_{x3} = -\frac{E_0}{Z_3} \left(t_3 e^{-jk_3(z-b)} \right)$$

Hier gilt wegen gleicher Materialien: $Z_1 = Z_3 = Z_0$; $k_1 = k_3$. Weiterhin sind die folgenden Stetigkeitsbedingungen zu erfüllen:

$$E_y(0^-) = E_y(0^+)$$

$$H_x(0^-) = H_x(0^+)$$

$$E_y(b^-) = E_y(b^+)$$

$$H_x(b^-) = H_x(b^+).$$

Setzt man diese ein, folgt das Gleichungssystem:

$$1 + r_1 = t_2 + r_2 \quad (2)$$

$$1 - r_1 = \frac{Z_0}{Z_2} (t_2 - r_2) \quad (3)$$

$$t_2 e^{-jk_2 b} + r_2 e^{jk_2 b} = t_3 \quad (4)$$

$$t_2 e^{-jk_2 b} - r_2 e^{jk_2 b} = \frac{Z_2}{Z_0} t_3. \quad (5)$$

3. **Leiten Sie aus dem Gleichungssystem eine Bedingung für k_2 im Inneren der Platte her, sodass im Raum vor der Platte keine reflektierte Welle existiert (Rechnung!).**

Hinweis: Verwenden Sie $\Gamma = \frac{Z_0 - Z_2}{Z_0 + Z_2}$.

Reflexionsfrei bedeutet in diesem Ansatz: $r_1 = 0$. Daraus folgt (Setze (2) = (3)):

$$\begin{aligned} \frac{Z_0}{Z_2} (t_2 - r_2) &= t_2 + r_2 \\ t_2 R &= r_2 \quad \text{mit } R = \frac{\frac{Z_0}{Z_2} - 1}{\frac{Z_0}{Z_2} + 1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Setze nun (4) in (5) ein, und ersetze nach (6). Danach tritt t_2 in jedem Ausdruck auf und entfällt komplett. Übrig bleibt:

$$\begin{aligned} e^{-jk_2 b} - R e^{jk_2 b} &= \frac{Z_2}{Z_0} (e^{-jk_2 b} + R e^{jk_2 b}) \\ 1 - \Gamma e^{j2k_2 b} &= \frac{Z_2}{Z_0} (1 + \Gamma e^{j2k_2 b}) \\ 1 - \frac{Z_2}{Z_0} &= \Gamma e^{j2k_2 b} \left(1 + \frac{Z_2}{Z_0} \right). \end{aligned}$$

Setzt man Γ wieder ein, folgt:

$$e^{j2k_2 b} = 1.$$

Die 1 lässt sich als $e^{j2n\pi}$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$ darstellen. Damit folgt für die gesuchte Bedingung:

$$k_2 b = n\pi. \quad (7)$$

4. **Bestimmen Sie aus der oben gefundenen Bedingung $b(\lambda_2)$, sodass die Anordnung immer Reflexionsfrei ist.**

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_2 \varepsilon_0}} = \frac{\omega}{2\pi} \lambda_2$$

Setzt man $k_2 = \omega/c_2$ und (7) ineinander ein, so folgt:

$$\frac{2\pi b}{\lambda_2} = n\pi \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots$$

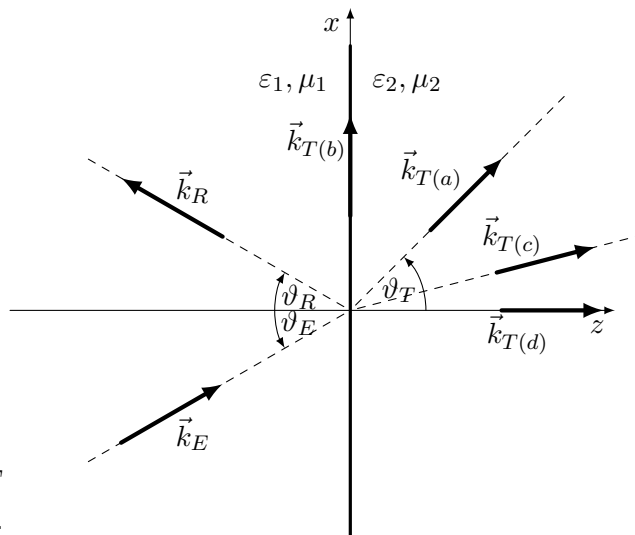
Elementare Umformungen liefern:

$$b(\lambda_2) = n \frac{\lambda_2}{2} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots$$

Betrachtet wird der schräge Einfall einer ebenen Welle auf einen Halbraum mit unterschiedlichen Materialeigenschaften. Der gesamte Raum sei nichtleitend.

Das magnetische Feld sei bekannt. Es gilt:

$$\begin{aligned}\vec{H}_E &= \vec{e}_y H_0 e^{-j\vec{k}_E \cdot \vec{r}}, \\ \vec{H}_R &= \vec{e}_y r H_0 e^{-j\vec{k}_R \cdot \vec{r}}, \\ \vec{H}_T &= \vec{e}_y t H_0 e^{-j\vec{k}_T \cdot \vec{r}}, \\ r &= \frac{\cos \vartheta_E - \frac{Z_2}{Z_1} \cos \vartheta_T}{\cos \vartheta_E + \frac{Z_2}{Z_1} \cos \vartheta_T}, \\ t &= \frac{2 \cos \vartheta_E}{\cos \vartheta_E + \frac{Z_2}{Z_1} \cos \vartheta_T}, \\ Z_1 &= \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\end{aligned}$$



Darin kennzeichnen die Indices E, R und T die einfallende, reflektierte und transmittierte Welle.

1. Welche Randbedingungen müssen in $z = 0$ erfüllt sein? Leiten Sie aus einer der Randbedingungen das Brechungsgesetz von Snellius ab.

Die Tangentialkomponenten von \vec{E} und \vec{H} müssen stetig sein.

Für die Wellenvektoren gilt:

$$\vec{k}_E = k_1 \vec{n}_E, \quad \vec{k}_R = k_1 \vec{n}_R, \quad \vec{k}_T = k_2 \vec{n}_T, \quad k_1 = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_1}, \quad k_2 = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_2}$$

mit

$$\vec{n}_E = \vec{e}_x \sin(\vartheta_E) + \vec{e}_z \cos(\vartheta_E), \quad \vec{n}_R = \vec{e}_x \sin(\vartheta_R) - \vec{e}_z \cos(\vartheta_R), \quad \vec{n}_T = \vec{e}_x \sin(\vartheta_T) + \vec{e}_z \cos(\vartheta_T).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\vec{k}_E \cdot \vec{r} &= k_1 (x \sin(\vartheta_E) + z \cos(\vartheta_E)), \\ \vec{k}_R \cdot \vec{r} &= k_1 (x \sin(\vartheta_E) - z \cos(\vartheta_E)), \\ \vec{k}_T \cdot \vec{r} &= k_2 (x \sin(\vartheta_T) + z \cos(\vartheta_T)).\end{aligned}$$

Die Stetigkeit der tangentialen magnetischen Feldstärke in $z = 0$ erfordert:

$$e^{-jk_1 \sin(\vartheta_E)x} + r e^{-jk_1 \sin(\vartheta_R)x} = t e^{-jk_2 \sin(\vartheta_T)x}.$$

Da diese Gleichung für alle x erfüllt sein muss gilt:

$$\vartheta_E = \vartheta_R, \quad k_1 \sin(\vartheta_E) = k_2 \sin(\vartheta_T)$$

2. Geben Sie die elektrische Feldstärke der Teilwellen an.

Allgemein gilt für die Felder ebener Wellen:

$$\vec{E} = Z (\vec{H} \times \vec{n}).$$

und folglich

$$\begin{aligned}\vec{E}_E &= (\vec{e}_y \times \vec{n}_E) Z_1 \underline{H}_0 e^{-j\vec{k}_E \vec{r}} = (\vec{e}_x \cos(\vartheta_E) - \vec{e}_z \sin(\vartheta_E)) Z_1 \underline{H}_0 e^{-j\vec{k}_E \vec{r}}, \\ \vec{E}_R &= (\vec{e}_y \times \vec{n}_R) Z_1 r \underline{H}_0 e^{-j\vec{k}_R \vec{r}} = -(\vec{e}_x \cos(\vartheta_R) + \vec{e}_z \sin(\vartheta_R)) Z_1 r \underline{H}_0 e^{-j\vec{k}_R \vec{r}}, \\ \vec{E}_T &= (\vec{e}_y \times \vec{n}_T) Z_2 t \underline{H}_0 e^{-j\vec{k}_T \vec{r}} = (\vec{e}_x \cos(\vartheta_T) - \vec{e}_z \sin(\vartheta_T)) Z_2 t \underline{H}_0 e^{-j\vec{k}_T \vec{r}}.\end{aligned}$$

3. Berechnen Sie den komplexen Poyntingschen Vektor im gesamten Raum (Annahme: $\vartheta_T < \pi/2$).

$z < 0$: Für die Feldstärken gilt

$$\begin{aligned}\vec{H}_1 &= \vec{e}_y \underline{H}_0 \left(e^{-jk_1 z \cos(\vartheta_E)} + r e^{+jk_1 z \cos(\vartheta_E)} \right) e^{-jk_1 x \sin(\vartheta_E)}, \\ \vec{E}_1 &= Z_1 \underline{H}_0 \left(\vec{e}_x \cos(\vartheta_E) \left[e^{-jk_1 z \cos(\vartheta_E)} - r e^{+jk_1 z \cos(\vartheta_E)} \right] \right. \\ &\quad \left. - \vec{e}_z \sin(\vartheta_E) \left[e^{-jk_1 z \cos(\vartheta_E)} + r e^{+jk_1 z \cos(\vartheta_E)} \right] \right) e^{-jk_1 x \sin(\vartheta_E)}.\end{aligned}$$

Mit $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*$ folgt

$$\begin{aligned}\vec{S}_1 &= \frac{1}{2} Z_1 |\underline{H}_0|^2 \left(\vec{e}_z \cos(\vartheta_E) \left[1 - r^2 - 2jr \sin(2k_1 z \cos(\vartheta_E)) \right] \right. \\ &\quad \left. + \vec{e}_x \sin(\vartheta_E) \left[1 + r^2 + 2r \cos(2k_1 z \cos(\vartheta_E)) \right] \right)\end{aligned}$$

$z > 0$:

$$\begin{aligned}\vec{H}_2 &= \vec{e}_y t \underline{H}_0 e^{-jk_2 z \cos(\vartheta_T)} e^{-jk_2 x \sin(\vartheta_T)} \\ \vec{E}_2 &= Z_2 t \underline{H}_0 (\vec{e}_x \cos(\vartheta_T) - \vec{e}_z \sin(\vartheta_T)) e^{-jk_2 z \cos(\vartheta_T)} e^{-jk_2 x \sin(\vartheta_T)} \\ \vec{S}_2 &= \frac{1}{2} Z_2 |t|^2 |\underline{H}_0|^2 (\vec{e}_x \sin \vartheta_T + \vec{e}_z \cos \vartheta_T)\end{aligned}$$

Der linke Halbraum besitzt nun die Materialeigenschaften

$$\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0 \quad \text{und} \quad \mu_1 = \mu_0.$$

Im rechten Halbraum sollen vier Fälle (a-d) unterschieden werden. Der Einfallswinkel sei gleich $\vartheta_E = \pi/6$.

(a) $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0, \mu_2 = \mu_0,$

(b) $\varepsilon_2 = \varepsilon_0, \mu_2 = \mu_0,$

(c) $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0, \mu_2 = 4\mu_0,$

(d) $\varepsilon_2 \rightarrow \infty, \mu_2 = \mu_0.$

4 Welcher Parametersatz (a,b,c oder d) gehört zu den in der obigen Abbildung skizzierte Wellenvektoren? Ergänzen Sie in der obigen Abbildung jeweils den Wellenvektor der transmittierten Welle für die restlichen Parametersätze. Begründen Sie ihre Wahl durch eine kurze Rechnung.

Mit $\vartheta_E = \pi/6$ folgt aus dem Brechungsgesetz von Snellius

$$\sin \vartheta_T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}}$$

Es folgt für die vier Parametersätze:

- (a) $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0, \mu_2 = \mu_0 \Rightarrow \sin \vartheta_T = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$
 (b) $\varepsilon_2 = \varepsilon_0, \mu_2 = \mu_0 \Rightarrow \sin \vartheta_T = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1,$
 (c) $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0, \mu_2 = 4\mu_0 \Rightarrow \sin \vartheta_T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4},$
 (d) $\varepsilon_2 \rightarrow \infty, \mu_2 = \mu_0 \Rightarrow \sin \vartheta_T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{\varepsilon_2}} \Big|_{\varepsilon_2 \rightarrow \infty} = 0.$

Im Fall (a) wird die Welle vom Lot weg gebrochen und im Fall (c) zum Lot hin. Im Fall (b) fällt die Welle gerade unter dem Winkel ein, ab dem Totalreflektion herrscht. Im Fall (d) geht der Transmissionswinkel gegen Null, die Welle wird allerdings vollständig reflektiert.

5 Beschreiben Sie für alle Parametersätze jeweils den Gesamtleistungsfluss im zeitlichen Mittel in beiden Raumteilen. Beantworten Sie dazu die folgenden Fragestellungen jeweils getrennt für die x - und z -Richtung:

- Findet ein Leistungstransport statt?
- Bildet sich eine stehende Welle aus?

Die Fälle (a) und (c) unterscheiden sich nur im Brechungswinkel. Es findet jeweils in beiden Teilräumen ein Leistungstransport in x - und in z -Richtung statt.

(Anmerkung: Da im Raumteil 1 eine reflektierte Welle existiert kann das Feld in z -Richtung anteilig als stehende Welle interpretiert werden.)

Im Fall (b) fällt die Welle unter dem kritischen Winkel ein, ab dem Totalreflektion herrscht. Ein Leistungstransport findet in beiden Teilen nur in x -Richtung statt. Im Raumteil 1 bildet sich in z -Richtung eine stehende Welle aus.

(Anmerkung: Im Raumteil 2 ist das Feld unabhängig von der z -Koordinate (Grenzfall!).)

Im Fall (d) ist der Raum 2 feldfrei. Im Raumteil 1 verhalten sich die Wellen wie unter (b). Die tangentielle elektrische Feldstärke verschwindet jedoch in $z = 0$.

6 Nehmen Sie an, der Einfallswinkel ϑ_E ist frei wählbar. Bei welchen Parametersätzen kann der Fall $r = 0$ eintreten? Wie heißt der zugehörige Winkel ϑ_E .

Der Winkel heißt Brewsterwinkel.

$$r = \frac{\cos \vartheta_E - \cos \vartheta_T \frac{Z_2}{Z_1}}{\cos \vartheta_E + \cos \vartheta_T \frac{Z_2}{Z_1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \vartheta_E = \cos \vartheta_T \frac{Z_2}{Z_1} \quad (8)$$

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \sqrt{\frac{4\varepsilon_0\mu_2}{\mu_0\varepsilon_2}}$$

Im Fall (a) und (b) wird vom Lot weg gebrochen, d.h. es gilt $\cos \vartheta_E > \cos \vartheta_T$. Da $Z_2/Z_1 > 1$ gilt existiert somit eine Lösung der Gleichung (8). Der Brewsterwinkel existiert.

Im Fall (c) gilt $\cos \vartheta_E < \cos \vartheta_T$ und $Z_2/Z_1 > 1$. Es existiert keine Lösung der Gleichung (8) und somit auch kein Brewsterwinkel.

Im Fall (d) wird die Leistung vollständig reflektiert. Der Brewsterwinkel existiert nicht.

Zunächst wird eine Bandleitung mit konstanter Permittivität $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ betrachtet.

1. Geben Sie die Dispersionsgleichung für den TE₁₀-Mode an

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2} = \sqrt{(\omega \sqrt{\mu\varepsilon})^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2} \text{ mit } n = 1. \quad (2/2 \text{ P})$$

2. Bestimmen Sie die Cutoff-Frequenz, die Gruppen- und Phasengeschwindigkeit des TE₁₀-Modes.

TE₁₀-Mode, d.h. $n = 1$. Für die Bestimmung der Cutoff-Frequenz setze $k_z = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\omega \sqrt{\mu\varepsilon})^2 &= \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 \\ \Rightarrow \omega_c &= \frac{\pi}{d} c \\ \Rightarrow f_c &= \frac{c}{2d} \end{aligned} \quad (2/5 \text{ P})$$

Durch Umformen der Dispersionsgleichung nach ω erhält man die Funktion

$$\omega(k_z) = c \sqrt{k_z^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = c \frac{k_z}{\sqrt{k_z^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}}, \quad (2/5 \text{ P})$$

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c \sqrt{k_z^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}}{\sqrt{(\omega \sqrt{\mu\varepsilon})^2 - \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}} = \frac{c \sqrt{k_z^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}}{k_z} \quad (1/5 \text{ P})$$

3. Wie lautet das elektrische Feld des TEM-Modes? (Sie können es berechnen oder direkt angeben).

Der TEM-Mode hat nur transversale Feldkomponenten und hat keine transversale Abhängigkeit:

$$k_z = k, k_x = 0, E_z = 0.$$

Daher kann das E-Feld nur normale Komponenten bezogen auf die Welleleiter-Wände haben. Also:

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_0 e^{-jk_z z} \quad (5/5 \text{ P})$$

4. Bestimmen Sie die maximale Breite d_{\max} , bei der der Bandleiter nur einen Mode führen kann.

Gesucht ist die Breite, bei der die gegebene Frequenz f der Cutofffrequenz des nächsthohen Modes TE₁ entspricht (Siehe 2.):

$$d_{\max} = \frac{c}{2f} = \frac{c\pi}{\omega} \quad (5/5 \text{ P})$$

Nun ist $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Im Bereich $z < 0$ wird der TEM-Mode mit einer Frequenz f und der Amplitude E_0 angeregt. Die Welle breitet sich weiterhin in positiver z -Richtung aus.

5. Ist der TEM-Mode im Bereich $z > 0$ ausbreitungsfähig? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Die Cutofffrequenz des TEM-Modes ist null. Damit ist der TEM-Mode im Mehrleitersystem immer ausbreitungsfähig.

(2/2 P)

6. Bestimmen Sie das Feld in beiden Teilräumen.

Ansatz: Einfallende und reflektierte Welle in $z < 0$ und transmittierte Welle in $z > 0$.

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_x E_0 (e^{-jk_z z} + r e^{jk_z z}) \quad \vec{E}_2 = \vec{e}_x t E_0 e^{-jk_z z} \quad (1/6 \text{ P})$$

$$\vec{H}_1 = \vec{e}_y \frac{1}{Z_1} E_0 (e^{-jk_z z} - r e^{jk_z z}) \quad \vec{H}_2 = \vec{e}_y t \frac{1}{Z_2} E_0 e^{-jk_z z} \quad (1/6 \text{ P})$$

Randbedingungen in $z = 0$: Stetigkeit der Tangentialkomponenten des elektrischen und des magnetischen Feldes, also:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2|_{z=0} \quad \vec{H}_1 = \vec{H}_2|_{z=0} \quad \Rightarrow \quad 1 + r = t \quad \frac{1}{Z_1}(1 - r) = \frac{1}{Z_2}t \quad (2/6 \text{ P})$$

Es ergeben sich die bekannten Reflektions- und Transmissionsfaktoren (bei senkrechtem Einfall einer ebenen Welle auf eine dielektrische Grenzschicht):

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad t = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \quad (2/6 \text{ P})$$

Gegeben ist ein Rechteck-Hohlleiter mit ideal leitenden Wänden ($\kappa \rightarrow \infty$), der in z -Richtung unendlich ausgedehnt ist. Das Innere des Hohlleiters ist mit einem nicht leitenden Material ε, μ gefüllt. Die Querschnittsabmessungen betragen wie in der Zeichnung dargestellt $a \times b$, wobei $a = 3b$.

1. Geben Sie die Dispersionsgleichung für den TE_{nm} -Mode an.

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \sqrt{(\omega \sqrt{\mu\varepsilon})^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (2/2P)$$

2. Leiten Sie das elektrische Feld des TE_{20} -Modes aus der Helmholtz-Wellengleichung für das Vektorpotential her.

$$\vec{A} = \vec{e}_z A_z \quad \vec{E}_{TE} = \text{rot} \vec{A}$$

$$\Delta A_z + k^2 A_z = 0$$

Der Mode TE_{20} hat keine y -Abhängigkeit, somit kann folgender Separationsansatz verwendet werden:

$$A_z(x, y, z) = f(x) \cdot h(z)$$

Wobei für die Funktionen $f(x), h(z)$ folgende Lösungsansätze in Frage kommen (Wellenausbreitung in positiver z -Richtung vorausgesetzt):

$$f(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x), \quad h(z) = e^{-jk_z z} \quad (2/7P)$$

Aus diesem Vektorpotential ergibt sich das elektrische Feld:

$$\vec{E}_{TE} = \text{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k_x (-A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x)) e^{-jk_z z} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2/7P)$$

Randbedingung: Die y -Komponente des elektrischen Feldes E_y verschwindet an der Wand $x = 0$, da sie tangential zu dieser Wand gerichtet ist $\Rightarrow E_y(x)$ sin-förmig $\Rightarrow B = 0$. Also bleibt übrig:

$$\vec{E}_{TE} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_x A \sin(k_x x) e^{-jk_z z} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2/7P)$$

Aus der Randbedingung an der Wand $x = a$ erhält man

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad \text{wobei } m = 2 \quad (\text{TE}_{20}\text{-Mode}). \quad (1/7P)$$

3. Welcher ist der Grundmode des Wellenleiters?

Grundmode ist die TE_{10} -Welle, denn mit $a > b$ ist die Cutofffrequenz des TE_{10} -Modes kleiner als die des TE_{01} -Modes.

4. Bestimmen Sie die Ausbreitungskonstante k_z , die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit des Grundmodes bei Anregung mit der Frequenz f .

$$k_z = \sqrt{(2\pi f \sqrt{\mu\varepsilon})^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad (1/4P)$$

$$v_{ph} = \frac{2\pi f}{k_z} = \frac{2\pi f}{\sqrt{(\omega \sqrt{\mu\varepsilon})^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} \quad (1/4P)$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = c \frac{k_z}{\sqrt{k_z^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} = c \frac{k_z}{k} = c^2 \frac{k_z}{\omega} \quad (2/4P)$$

5. Welche TE-Moden können bei einer Frequenz f , die knapp unter der Cutoff-Frequenz des TE_{11} -Modes liegt, angeregt werden?

Es gilt laut Aufgabenstellung $a = 3b$. Die Cutofffrequenz eines Modes wird durch die Dispersionsgleichung und $k_z = 0$ bestimmt.

$$\omega_c = c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{3b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Die Cutofffrequenz ω_c soll kleiner sein als die Cutofffrequenz des TE_{11} -Modes. Dies ist der Fall für die Moden

$$TE_{10}, TE_{01} \quad (2/6P)$$

Moden mit $n > 1$ sind nicht ausbreitungsfähig, da deren Cutofffrequenz größer als die des TE_{11} -Modes ist. Moden mit $n = 0$ und $m > 1$ sind ausbreitungsfähig, wenn:

$$\begin{aligned} \omega_c &< \omega_c^{TE_{11}} \\ \Rightarrow c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{3b}\right)^2} &< c \sqrt{\left(\frac{\pi}{3b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{m\pi}{3b}\right)^2 < \left(\frac{\pi}{3b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \\ &\Rightarrow \left(\frac{m}{3}\right)^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{1}\right)^2 \\ &\Rightarrow m < \sqrt{10} = 3,16 \end{aligned}$$

Also sind zusätzlich ausbreitungsfähig:

$$TE_{20}, TE_{30}. \quad (4/6P)$$

6. Geben Sie die Bezeichnungen der in den nachfolgenden Feldbildern dargestellten Moden eines Rechteck-Hohlleiters an.

$$a) TE_{31} \quad b) TM_{41} \quad c) TE_{20} \quad d) TM_{22} \quad (4/4P)$$