Name: Matrikel-Nr.:

Prof. Dr. Henning Sprekeler

Endklausur

Berlin, 28. Februar, 2017

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Bitte beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Vor- und Nachnamen, sowie Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle 18 Blätter vorliegen haben.
- Auf den letzten Seiten befindet sich extra Platz für Ihre Lösungen. Es muss ersichtlich sein auf welche Aufgabe Sie sich dort beziehen.
- Bei Bedarf können Sie zusätzliche leere Blätter von uns bekommen (Name und Matrikelnummer nicht vergessen!).
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift.
- Im Folgenden enthalten die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ die Null. Also $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$

Viel Erfolg!

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
Σ	

Bearbeitungszeit: 150 Minuten
Max. Punktzahl: 100 Punkte

Aufgabe 1. Aussagenlogik (6 Punkte)

1. Sei p falsch, q wahr und r wahr. Geben Sie den daraus folgenden Wahrheitswert folgender Aussagen an.
   a) $(\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow (p \vee \neg r)$

   b) $\neg(\neg p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \equiv$

2. Bestimmen Sie mittels Wahrheitstabelle, ob $\neg(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ eine logische Folge von $\neg p$ ist.

p	q	
F	F	
F	W	
W	F	
W	W	

3. Seien h, m und u Aussagen, die folgendermaßen definiert sind:
   - h: Ich habe Hunger.
   - m: Die Mensa hat geöffnet.
   - u: Es ist 17 Uhr.

   Schreiben Sie unter Verwendung von h, m, u und $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ die folgenden Aussagen als logische Ausdrücke:
   a) Es ist 17 Uhr und ich habe Hunger.

   b) Wenn es 17 Uhr ist, hat die Mensa nicht geöffnet.

   c) Entweder habe ich keinen Hunger, oder die Mensa hat nicht geöffnet, aber nicht beides.

Aufgabe 2. Prädikatenlogik (4 Punkte)

Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogischen Ausdruck über der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Verwenden Sie dabei das Prädikat $p(x, y) = x < y$ oder aus diesem Prädikat und arithmetischen Operationen abgeleitete Prädikate. Zum Beispiel $p(x + y, z)$ für $(x + y) < z$.

1. Es existieren natürliche Zahlen, deren Produkt größer ist als ihre Summe.

2. Die Summe zweier nicht identischer natürlicher Zahlen ist größer als Null.

Aufgabe 3. Mengen (8 Punkte)

1. Schreiben Sie eine Mengenspezifikation in Prädikatenform für die folgende Menge:

$$M := \{4, 7, 10, 13, 16, \ldots\}$$

2. Werten Sie den Term

$$(\mathcal{P}(\{a,b\}) \setminus \mathcal{P}(\{b\})) \;\cap\; (\{a,b\} \cup \{b,\emptyset\})$$

schrittweise aus, bis keine Symbole außer $\emptyset, \{, \}, a, b$ und Kommata mehr im Term enthalten sind. $\mathcal{P}$ bezeichnet hier die Potenzmenge.

3. Sei M eine beliebige Menge und seien $A, B, C \subseteq M$ Teilmengen von M. Begründen Sie mithilfe eines oder mehrerer Venn-Diagramme, ob folgendes im allgemeinen gilt:

   a) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

   b) $(A \subseteq B) \implies (C \setminus A \subseteq C \setminus B)$

Aufgabe 4. Relationen und Funktionen (8 Punkte)

Gegeben seien die Mengen
$A := \{1, 2, 3, 4\}$, $B := \{a, b, c, d\}$ und $C := \{5, 6, 7, 8\}$,
sowie die Relationen
$R_1 \subseteq A \times A$ mit $R_1 := \{(1, 1), (2, 4), (2, 3)\}$ und
$R_2 \subseteq B \times C$ mit $R_2 := \{(a, 7), (a, 8), (b, 8), (c, 5), (d, 5)\}$.
Hinweis: Im Folgenden bezeichnet $t(R)$ die transitive, $r(R)$ die reflexive und $s(R)$ die symmetrische Hülle einer Relation R.

1. Stellen Sie $r(s(t(R_1)))$ und $r(t(s(R_1)))$ graphisch dar und geben Sie jeweils an, ob die resultierende Relation eine Äquivalenzrelation ist. Falls eine Äquivalenzrelation vorliegt, geben Sie alle zugehörigen Äquivalenzklassen an.

2. Stellen Sie die Relation R_2 graphisch dar und kreuzen Sie diejenigen der folgenden Eigenschaften an, die R_2 erfüllt:

   rechtseindeutig ☐ linkseindeutig ☐ rechtstotal ☐ linkstotal ☐

3. Geben Sie eine rechtstotale aber nicht linkstotale Relation $S \subseteq C \times A$ an, so dass $S \circ R_2 = \{(a, 2), (b, 2), (c, 1), (d, 1)\}$. Sie können die Relation graphisch oder in aufzählender Schreibweise angeben.

Aufgabe 5. Sprachen & Grammatiken I (7 Punkte)

Sei $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ eine Grammatik mit

$$\begin{aligned} P = \{S &\to B|AB|BaB|ABaB, \\ A &\to aA|a, \\ B &\to bB|b\}. \end{aligned}$$

1. Geben Sie den größtmöglichen Typ der Grammatik G bezüglich der Chomsky-Hierarchie an. Geben Sie dazu für jeden Chomsky-Typ an warum die Grammatik von diesem Typ ist oder nicht.

2. Geben Sie ein Wort an, welches von der Grammatik G erzeugt werden kann, das die Länge 4 hat und das zwei a und zwei b enthält. Geben Sie dazu eine Ableitungsfolge an, die dieses Wort erzeugt.

3. Geben Sie die von G erzeugte Sprache als Menge an, ohne dabei reguläre Ausdrücke zu verwenden.

Aufgabe 6. Sprachen & Grammatiken II (7 Punkte)

Geben Sie eine Grammatik vom angegebenen Chomsky-Typ für die nachfolgenden Sprachen an.
Hinweis 1: Es genügt, wenn Sie die Regeln angeben und die Startvariable kennzeichnen. Nach dem Tupel ist nicht gefragt.
Hinweis 2: $|w|$ bezeichnet die Länge des Wortes w.

1. Eine **reguläre** Grammatik für $L_1 := \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w| \leq 3\}$

2. Eine **kontextfreie** Grammatik für
   $L_2 := \left\{a^{m-1}b^m \in \{a, b\}^* \mid m \in \mathbb{N} \wedge m > 0 \wedge m \text{ ist gerade}\right\}$

Aufgabe 7. Endliche Automaten (8 Punkte)

1. Geben Sie einen endlichen **deterministischen** Automaten (DFA) graphisch an, der genau folgende Sprache akzeptiert:

   $$L_1 := \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \text{ ist gerade}\}$$

   Hinweis 1: Nach dem Tupel ist nicht gefragt.
   Hinweis 2: Hierbei bezeichnet $\#_a(w)$ die Anzahl der a's in w.
   Hinweis 3: 0 ist eine gerade Zahl.

2. Geben Sie einen endlichen **deterministischen** Automaten (DFA) graphisch an, der genau die folgende Sprache akzeptiert:

   $$L_2 := \{w \in \{a, b\}^* \mid (\#_a(w) \text{ ist gerade}) \wedge (\#_b(w) \text{ ist gerade})\}$$

   Hinweis: Nach dem Tupel ist nicht gefragt.

   Geben Sie eine Zustandsfolge an, die Ihr DFA beim Lesen des Wortes *abaab* durchläuft und begründen Sie, warum Ihr Automat das Wort akzeptiert oder verwirft.

Aufgabe 8. Rechtskongruenz (9 Punkte)

Wir betrachten die Sprache L, die über folgenden regulären Ausdruck definiert ist:
$L := L\left((ba|ab)b^*\right)$.

Die Rechtskongruenz $R_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ über einer Sprache L über einem Alphabet Σ ist definiert als

$$(x, y) \in R_L \Leftrightarrow (\forall w \in \Sigma^* : xw \in L \Leftrightarrow yw \in L).$$

1. Stellen Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten (NFA), der genau die Sprache L akzeptiert, graphisch dar.
   Hinweis: Nach dem Tupel ist nicht gefragt.

2. Zeigen Sie für drei von Ihnen frei gewählte Wörter x_1, x_2 und x_3, dass diese paarweise nicht in Relation bezüglich R_L stehen. Das heißt, zeigen Sie dass $\neg(x_1 R_L x_2)$, $\neg(x_1 R_L x_3)$ und $\neg(x_2 R_L x_3)$.

3. Geben Sie für jede Äquivalenzklasse von R_L einen Repräsentanten sowie die zugehörige Menge an. Sie dürfen die Mengen angeben wie Sie möchten (verbal, intensional, extensional oder als regulären Ausdruck). Achten Sie jedoch auf Eindeutigkeit.

Aufgabe 9. CYK-Algorithmus (5 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G := (V, \{a, b\}, P, S)$ mit $V := \{S, A, B, X\}$ und

$$\begin{aligned} P := \{S &\to XA \mid BA, \\ X &\to a \mid b \mid SX, \\ A &\to a, \\ B &\to b\}. \end{aligned}$$

Überprüfen Sie mit dem Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami jeweils, ob die Wörter *baba* und *bbbaba* in $L(G)$ enthalten sind. Füllen Sie dafür die folgende Tabelle vollständig aus. Geben Sie für jedes der beiden Wörter an, welche Tabelleneinträge anzeigen, ob das Wort in $L(G)$ enthalten ist oder nicht.

	b	b	b	a	b	a
1						
2						☐
3					☐	☐
4				☐	☐	☐
5			☐	☐	☐	☐
6		☐	☐	☐	☐	☐

Aufgabe 10. Kellerautomat (7 Punkte)

Gegeben sei die Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$:

$$L := \left\{ a^m b^n c^{m+1} \in \Sigma^* \mid m \in \mathbb{N} \wedge m > 0 \wedge n \in \{0, 1\} \right\}$$

- Stellen Sie einen Kellerautomaten, der genau die Sprache L akzeptiert, graphisch dar.
  Hinweis: Nach dem Tupel wird nicht gefragt.

- Geben Sie die Zustandsfolgen und den Kellerinhalt Ihres Kellerautomaten unter Einlesen der Wörter *abcc* und *bcc* an und begründen Sie jeweils weshalb Ihr Automat das Wort akzeptiert oder verwirft.

Restwort	*abcc*	
Zustand		
Kellerinhalt	#	

Restwort	*bcc*	
Zustand		
Kellerinhalt	#	

Aufgabe 11. Turingmaschine (9 Punkte)

Betrachten Sie erneut die Sprache L aus vorheriger Aufgabe, also:

$$L := \left\{a^m b^n c^{m+1} \in \Sigma^* \mid m \in \mathbb{N} \land m > 0 \land n \in \{0,1\}\right\}$$

- Stellen Sie eine deterministische, einbändige Turingmaschine M, mit $T(M) = L$, graphisch dar.
  Hinweis: Nach dem Tupel wird nicht gefragt.

- Geben Sie die Konfigurationsfolgen Ihrer Turingmaschine unter Einlesen der Wörter *abc* und *acc* an und begründen Sie jeweils weshalb Ihre Turingmaschine das Wort akzeptiert oder verwirft.

Aufgabe 12. Entscheidbarkeit (5 Punkte)

Sei

$$H_{\text{jede}} := \{w \mid M_w \text{ hält bei Eingabe jeder beliebigen Zeichenkette aus } \Sigma^*\}$$

die Menge aller Zeichenkodierungen w von Turingmaschinen M_w mit Eingabealphabet Σ, die bei jeder Eingabe aus Σ^* halten.
Zeigen Sie mittels Reduktion, dass H_{jede} nicht entscheidbar ist.
Als gegeben dürfen Sie verwenden, dass

$$H_0 := \{w \mid M_w \text{ angesetzt auf leerem Band hält}\}$$

nicht entscheidbar ist.
Hinweis 1: Für die Reduktion müssen Sie keine explizite Funktion angeben. Es genügt wenn Sie eine Turingmaschine verbal beschreiben, die die Reduktion durchführt.
Hinweis 2: Falls Sie die Aufgabe nicht lösen können, geben Sie zumindest skizzenhaft an wie Sie vorgehen würden.

Aufgabe 13. Komplexität (6 Punkte)

Verwenden Sie im folgenden NP für die Menge der nichtdeterministisch in polynomial beschränkter Zeit entscheidbaren Sprachen und P für die Menge der deterministisch in polynomial beschränkter Zeit entscheidbare Sprachen.

1. Sei A eine NP-vollständige Sprache. Ergänzen Sie die Lücken mit NP und P, um eine Äquivalenz zu erhalten:

$$A \in \ldots \Leftrightarrow \ldots = \ldots$$

2. Nehmen Sie an, dass $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$. Skizzieren Sie ein Venn-Diagramm, das die Mengen P, NP und die Menge der NP-vollständigen Sprachen enthält.

3. Skizzieren Sie ein weiteres Venn-Diagramm für diese drei Mengen unter der Annahme $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$.

Aufgabe 14. Vermischtes (11 Punkte)

1. Es seien $f : A \to B$ und $g : A \to B$ beliebige Funktionen. Geben Sie an ob $f \setminus g$ im allgemeinen wieder eine Funktion ist. Begründen Sie Ihre Aussage. Geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel an, falls die Menge *keine* Funktion ist.

2. Es seien A und B zwei Sprachen über einem Alphabet Σ. Ist die Aussage

$$A^* \cap B^* = (A \cap B)^*$$

   wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie insbesondere an, ob die Aussage für alle Sprachen, für eine unendliche Menge von Sprachen, für eine endliche Menge von Sprachen oder niemals gilt.

3. Gilt folgende Gleichheit? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$(a|ab)^*b^* = a^*(ba|a)^*b^*$$

4. Geben Sie einen regulären Ausdruck für folgende Sprache an:

$$L := \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ enthält genau einmal die Zeichenkette } 111\}$$

5. Geben Sie an, ob die Menge $A := \{w \mid M_w \text{ berechnet eine identische Abbildung}\}$ entscheidbar ist, indem Sie sich auf einen in der Vorlesung gezeigten Satz beziehen.
   Hinweis: M_w bezeichnet die Turingmaschine, die durch w binär kodiert ist.

Extra Platz.
Bitte kennzeichnen Sie eindeutig, auf welche Aufgabe sich Ihre Rechnungen beziehen.

Extra Platz.

Bitte kennzeichnen Sie eindeutig, auf welche Aufgabe sich Ihre Rechnungen beziehen.

Extra Platz.

Bitte kennzeichnen Sie eindeutig, auf welche Aufgabe sich Ihre Rechnungen beziehen.