Formelsammlung:

- Auf- und Absteigeoperatoren

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{1}{2}}\ell(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \tag{1}$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{1}{2}\frac{\hbar}{\ell}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \tag{2}$$

- Drehimpulsoperatoren I

$$\left[\hat{L}_n, \hat{L}_m\right] = i\hbar \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{n,m,k}\hat{L}_k \tag{3}$$

- Drehimpulsoperatoren II

$$\hat{L}_x \left|j,m\right\rangle = a_{j,m}\left|j,m+1\right\rangle + b_{j,m}\left|j,m-1\right\rangle \tag{4}$$

$$\hat{L}_y \left|j,m\right\rangle = c_{j,m}\left|j,m+1\right\rangle + d_{j,m}\left|j,m-1\right\rangle \tag{5}$$

- Drehimpulsoperatoren III

$$\hat{L}_\pm Y_{l,m} = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}Y_{l,m\pm 1}. \tag{6}$$

- Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\boldsymbol{q}, \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}, t\right) = 0 \tag{7}$$

-

$$\operatorname{arcsin}(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

$$\operatorname{arsinh}(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

Aufgabe 1 (2+2+2+4+2=12 Punkte): *Potentialstufe*
Betrachten Sie die Streuung eines quantenmechanischen Teilchens mit Masse m und Energie E an einer Potentialstufe $V(x)$ der Höhe V_0:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Geben Sie die Schrödinger-Gleichung in beiden Teilbereichen an und lösen Sie diese.

Betrachten Sie nun den Fall einer von links nach rechts einlaufenden Welle unter der sogenannten Streubedingung (d.h wir suchen Lösungen, die auf der rechten Seite nur nach rechts laufen, aber keinen nach links laufenden Anteil aufweisen).

(b) Wie hängen die in den Wellenfunktionen Ψ_I und Ψ_{II} auftretenden Koeffizienten miteinander zusammen?

(c) Geben Sie für die Fälle $E > V_0$ und $E < V_0$ die Wellenfunktionen Ψ_{II} im rechten Teilbereich an und diskutieren Sie diese.

(d) Betrachten Sie nun $E > V_0$ und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}[\Psi^* \frac{\partial}{\partial x}\Psi]$ in beiden Bereichen. Geben Sie den Anteil der einlaufenden, der reflektierten und der transmittierte Wahrscheinlichkeitsstromdichte an.

(e) Wie lautet der Reflexionskoeffizient R und der Transmissionskoeffizient T?

Aufgabe 2 (3 Punkte): *Drehimpulseigenfunktionen*
Die gemeinsamen Eigenfunktionen des Drehimpulsopertors $\hat{\mathbf{L}}^2$ und seiner z-Komponenten $\hat{L}_z$ sind in Ortsdarstellung durch die Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}$ gegeben. Diese lassen sich mit Hilfe der Leiteroperatoren $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ berechnen. Berechen Sie Y_{10} in der Ortsdarstellung. In der Ortsdarstellung gilt

$$\hat{L}_\pm = \hbar e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \qquad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}.$$

Aufgabe 3 (1+5+1=7 Punkte): *Zeitentwicklung in der QM*

Es sei der Hamilton Operator

$$\hat{H} = \varepsilon_1|1\rangle\langle 1| + \varepsilon_2|2\rangle\langle 2|$$

gegeben. Das System sei zum Zeitpunkt t_0 im Zustand $|\Psi\rangle(t_0) = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle$, wobei $|1\rangle$ und $|2\rangle$ zueinander orthonormal sind.

1. Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung vom Zustand $|\Psi\rangle(t)$.

2. Es sei $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$. Berechnen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert der Observable $|\phi\rangle\langle\phi|$ bzgl. $|\Psi\rangle$! Zeigen Sie dabei auch, dass der Erwartungswert immer reell ist!

3. Für welche Fälle ist der Erwartungswert der Observable nicht zeitabhängig? Im Fall der Zeitabhängigkeit, welche Frequenzen treten auf?

Aufgabe 4 (2 Punkte): *Kohärente Zustände*

Kohärente Zustände sind definiert über

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \,.$$

Hier ist α eine komplexe Zahl und $|n\rangle$ sind die Eigenzustände des Harmonischen Oszillators. Zeigen Sie, dass die kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$ Eigenzustände des Absteigeoperators $\hat{a}$ zum Eigenwert α sind, d.h. dass die Relation

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$$

gilt.

Aufgabe 5 (2+2+3=7 Punkte): *Harmonischer Oszillator in einem Kraftfeld*
Der Hamilton-Operator eines Harmonischen Oszillators in einem äußeren Feld λ ist durch

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2\right) + \lambda\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right).$$

gegeben, wobei $\hat{a}^\dagger$ der Aufsteigeoperator und $\hat{a}$ der Absteigeoperator ist.
Der Hamilton-Operator ist nicht-diagonal. Um $\hat{H}$ zu diagonalisieren führen wir nun *verschobene* Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{b}^\dagger$ und $\hat{b}$ ein, mittels

$$\hat{b} = \hat{a} + \beta, \quad \hat{b}^\dagger = \hat{a}^\dagger + \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{b}$ und $\hat{b}^\dagger$ der gleichen Kommutatorrelation genügen wie $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$.

(b) Drücken Sie $\hat{H}$ durch $\hat{b}^\dagger$ und $\hat{b}$ aus und zeigen Sie, dass man durch geeignete Wahl von β, den Hamilton-Operator auf die Form eines Harmonischen Oszillators *ohne* äußeres Feld bringen kann:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{b}^\dagger\hat{b} + 1/2\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(c) Zeigen Sie schließlich, dass der Zustand niedrigster Energie eines Oszillators in einem äußeren Feld durch einen kohärenten Zustand gegeben ist. **Hinweis:** Das Ergebnis aus Aufgabe 4 könnte hilfreich sein.