DON'T PANIC!

Mathe für GLET

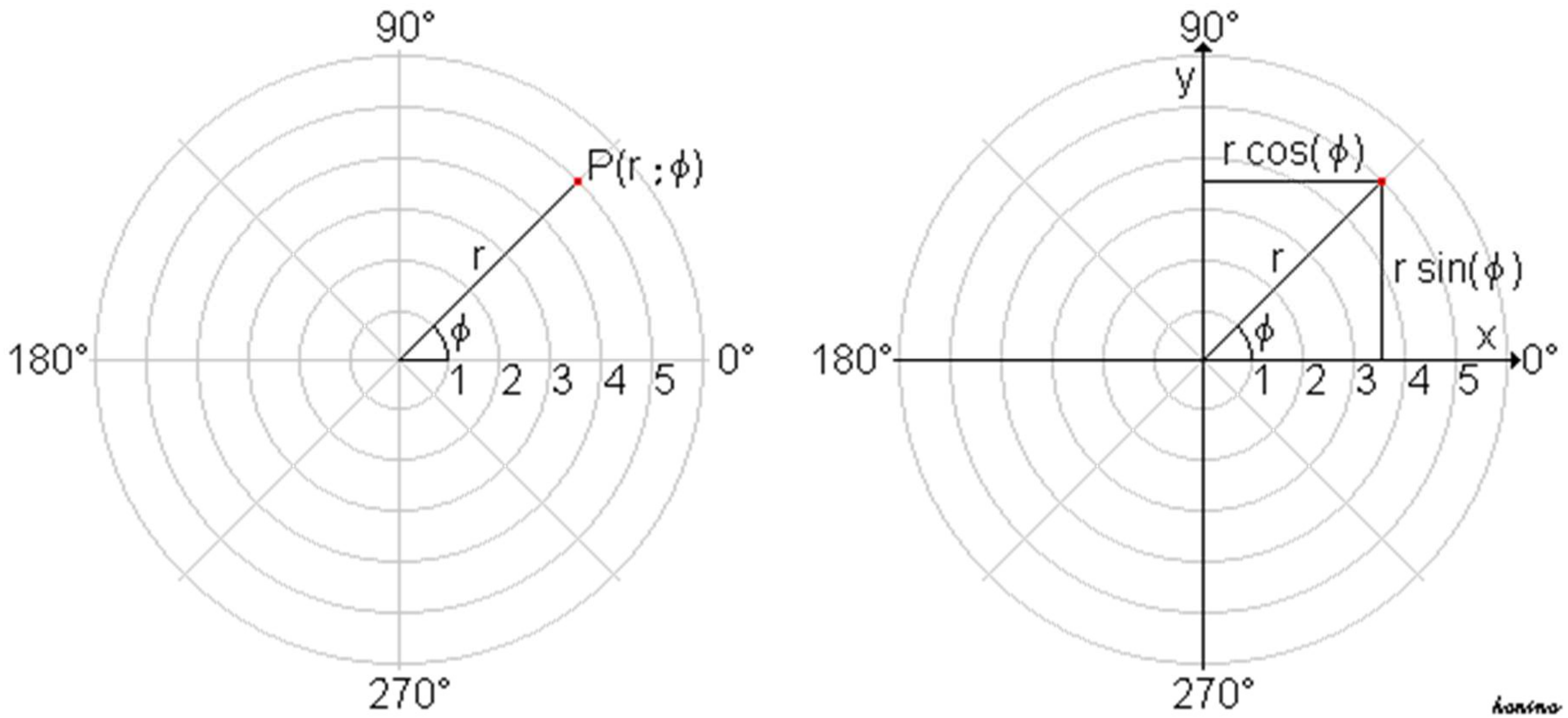
Vortrag von Magdalena Rätz am 19.11.2019
maggyrz@freitagsrunde.org

Ablauf

- Koordinatensysteme
- Integralrechnung
- Tipps und Tricks
- Übungsaufgaben

Koordinatensysteme

Polarkoordinaten



Polarkoordinaten

Polarkoordinaten in Karthesische Koordinaten

$$x = r\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\varphi)$$

$$r = \rho$$
$$\phi = \varphi$$

Karthesische Koordinaten in Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left({}^{y}/_{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left({}^{y}/_{x}\right) + \pi & x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left({}^{y}/_{x}\right) - \pi & x < 0, y < 0 \\ +{}^{\pi}/_{2} & x = 0, y > 0 \\ -{}^{\pi}/_{2} & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Polarkoordinaten

Polarkoordinaten in Karthesische Koordinaten

$$x = r\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\varphi)$$

$$r = \rho$$
$$\phi = \varphi$$

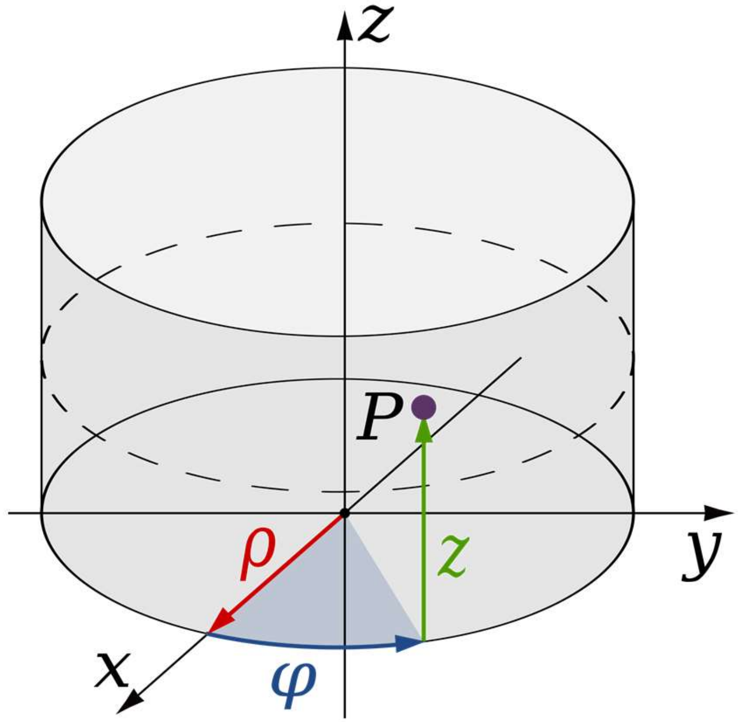
Karthesische Koordinaten in Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left({}^{y}\!/_{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left({}^{y}\!/_{x}\right) + \pi & x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left({}^{y}\!/_{x}\right) - \pi & x < 0, y < 0 \\ +{}^{\pi}\!/_{2} & x = 0, y > 0 \\ -{}^{\pi}\!/_{2} & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

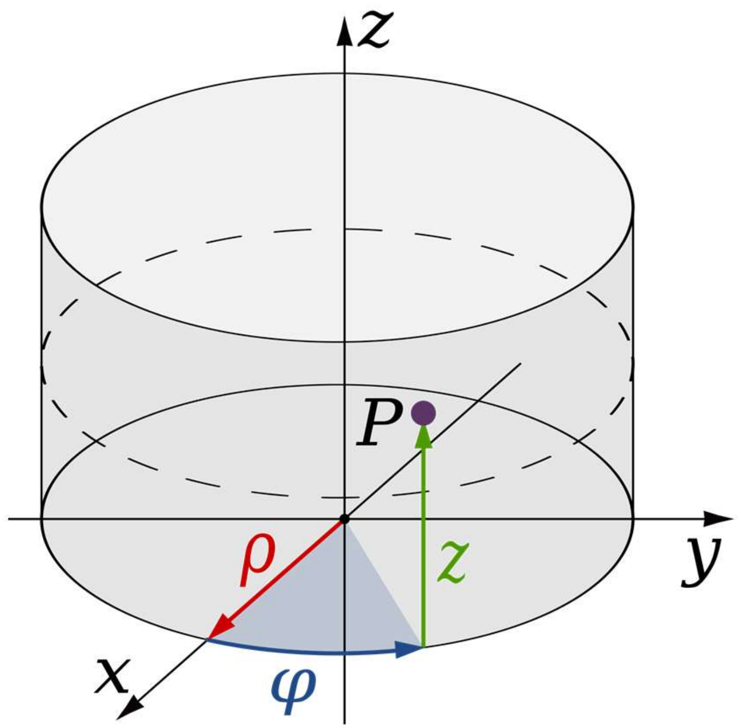
$$\varphi \coloneqq \operatorname{arctan2}({}^{y}\!/_{x})$$

Zylinderkoordinaten



Bildquelle: Inductiveload
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cylindrical_Coordinates.svg

Zylinderkoordinaten



Bildquelle: Inductiveload
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cylindrical_Coordinates.svg

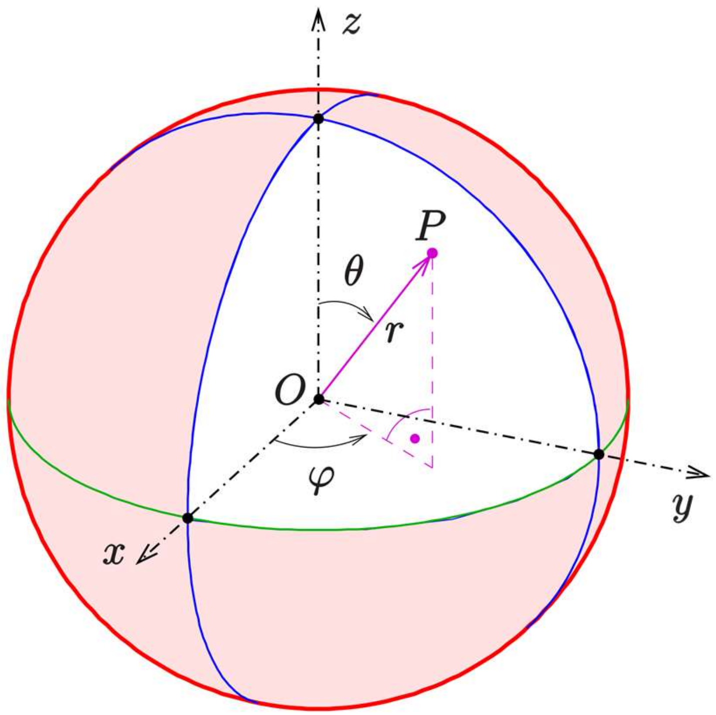
Zylinderkoordinaten in Karthesische Koordinaten

$$x = \rho \cos(\varphi)$$
$$y = \rho \sin(\varphi)$$
$$z = z$$

Karthesische Koordinaten in Zylinderkoordinaten

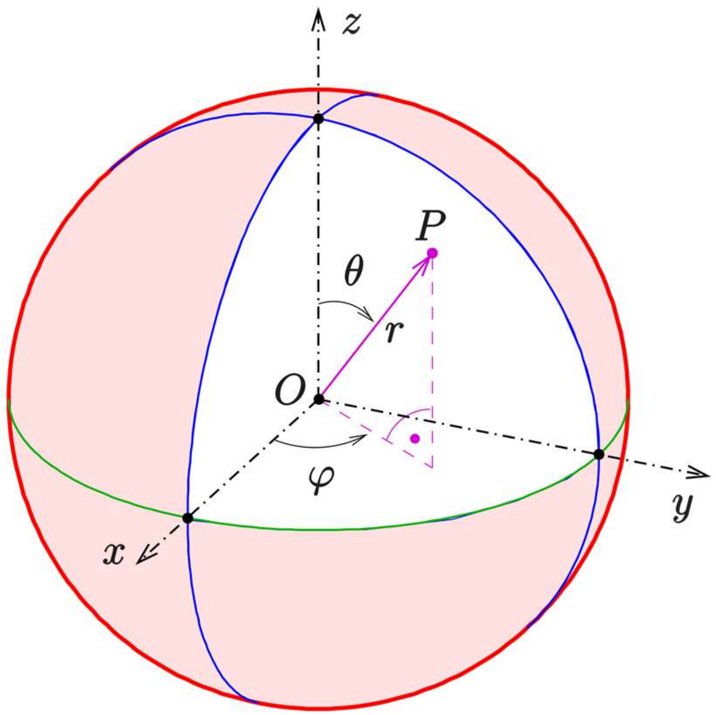
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \operatorname{arctan2}\left({}^{y}/_{x}\right)$$
$$z = z$$

Kugelkoordinaten



Bildquelle: Ag2gaeh, CC BY-SA 4.0
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kugelkoord-def.svg

Kugelkoordinaten



Bildquelle: Ag2gaeh, CC BY-SA 4.0
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kugelkoord-def.svg

Kugelkoordinaten in Karthesische Koordinaten

$$x = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$$
$$z = r\cos(\vartheta)$$

Kugelkoordinaten in Karthesische Koordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\vartheta = \operatorname{arctan2}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$
$$\varphi = \operatorname{arctan2}\left({}^{y}/_{x}\right)$$

Koordinatenlinien, -flächen
Einheits- und Normalenvektoren

- Koordinatenlinie:
  - Alle Koordinaten bis auf eine sind fest.

Koordinatenlinien, -flächen Einheits- und Normalenvektoren

- Koordinatenlinie:
  - Alle Koordinaten bis auf eine sind fest.
- Koordinatenfläche:
  - Eine Koordinate ist fest, die anderen beiden sind variabel.

Koordinatenlinien, -flächen
Einheits- und Normalenvektoren

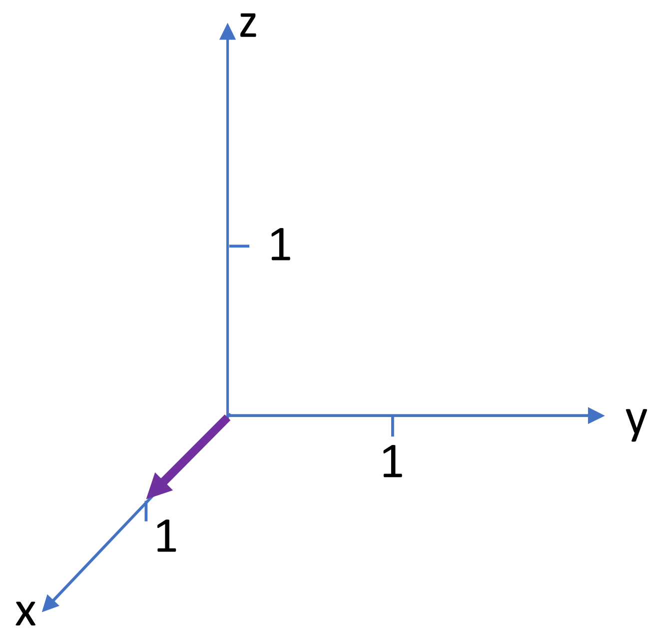
- Koordinatenlinie:
  - Alle Koordinaten bis auf eine sind fest.
- Koordinatenfläche:
  - Eine Koordinate ist fest, die anderen beiden sind variabel.
- Einheitsvektor:
  - Hat den Wert 1 in einer Koordinate, sonst 0.

Koordinatenlinien, -flächen
Einheits- und Normalenvektoren

- Koordinatenlinie:
  - Alle Koordinaten bis auf eine sind fest.
- Koordinatenfläche:
  - Eine Koordinate ist fest, die anderen beiden sind variabel.
- Einheitsvektor:
  - Hat den Wert 1 in einer Koordinate, sonst 0.
- Normalenvektor:
  - Steht senkrecht auf der Fläche.
  - Der Normalenvektor einer Koordinatenfläche ist deren Einheitsvektor $\vec{e}$.

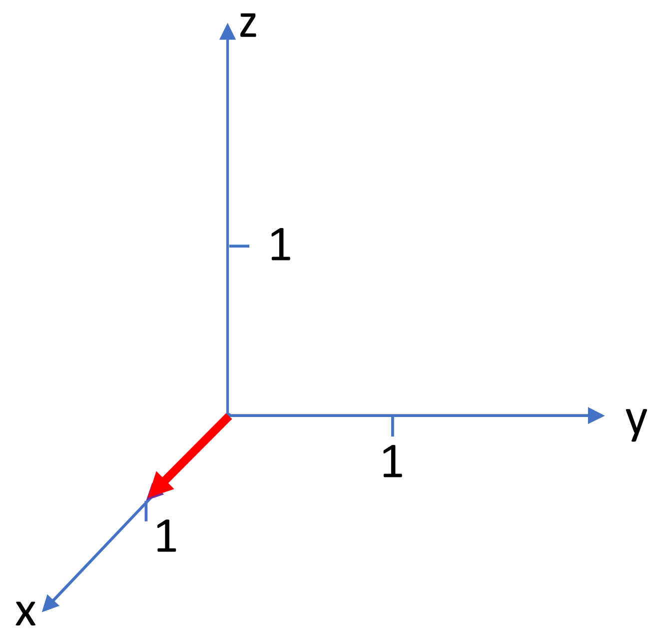
Vergleich der Koordinatensystem

$$\vec{x}_{karth} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{x}_{zylind} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{x}_{kugel} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



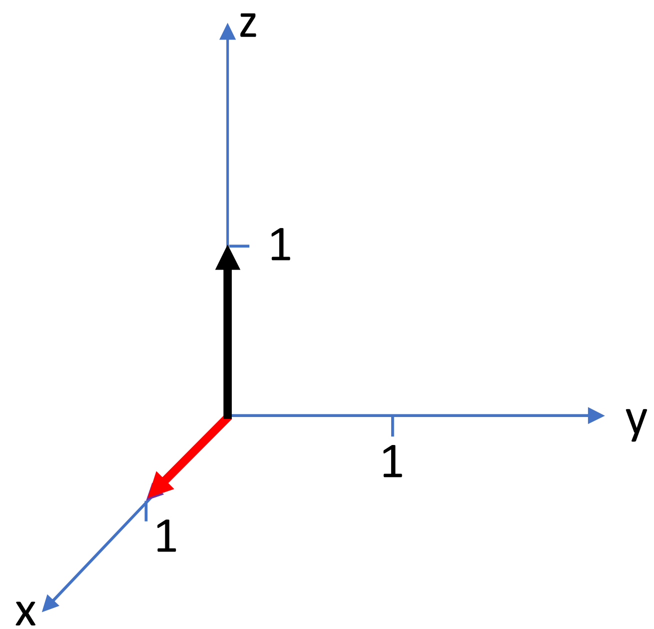
Vergleich der Koordinatensystem

$$\vec{x}_{karth} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{x}_{zylind} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{x}_{kugel} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Vergleich der Koordinatensystem

$$\vec{x}_{karth} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{x}_{zylind} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{x}_{kugel} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Integralrechnung

Wichtige Rechenregeln für Integrale

$$\int f_1(x) + f_2(x) \; dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx$$

$$\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

Produkt der Einheitsvektoren

Skalarprodukt der Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Vektorielles Wegelement

Wegelement $d\vec{s}$:

$$\int_s \vec{f}\, d\vec{s}$$

Vektorielles Wegelement

Wegelement $d\vec{s}$:

$$\int_S \vec{f}\, d\vec{s}$$

$$= \int_{s_{xa}}^{s_{xb}} \int_{s_{ya}}^{s_{yb}} \int_{s_{za}}^{s_{zb}} \left(f_x \vec{e}_x + f_y\, \vec{e}_y + f_z\, \vec{e}_z \right) \cdot \left(dx\, \vec{e}_x + dy\, \vec{e}_y + dz\, \vec{e}_z \right)$$

$$= \int_{s_{xa}}^{s_{xb}} \int_{s_{ya}}^{s_{yb}} \int_{s_{za}}^{s_{zb}} \left(f_x dx + f_y dy + f_z\, dz \right)$$

$$= \int_{s_{xa}}^{s_{xb}} f_x dx + \int_{s_{ya}}^{s_{yb}} f_y dy + \int_{s_{za}}^{s_{zb}} f_z dz$$

Vektorielles Wegelement

Wegelement $d\vec{s}$:

Definition der Funktion

Definition des Wegelements

$$\int_s \vec{f}\, d\vec{s}$$

$$= \int_{s_{xa}}^{s_{xb}} \int_{s_{ya}}^{s_{yb}} \int_{s_{za}}^{s_{zb}} \left(f_x \vec{e}_x + f_y\, \vec{e}_y + f_z\, \vec{e}_z \right) \cdot \left(dx\, \vec{e}_x + dy\, \vec{e}_y + dz\, \vec{e}_z \right)$$

$$= \int_{s_{xa}}^{s_{xb}} \int_{s_{ya}}^{s_{yb}} \int_{s_{za}}^{s_{zb}} \left(f_x dx + \ f_y dy + f_z\, dz \right)$$

Produkte der Einheitsvektoren

$$= \int_{s_{xa}}^{s_{xb}} f_x dx + \int_{s_{ya}}^{s_{yb}} f_y dy + \int_{s_{za}}^{s_{zb}} f_z dz$$

Konstanten

Vektorielles Flächenenelement

Flächenelement $d\vec{A}, d\vec{O}$:

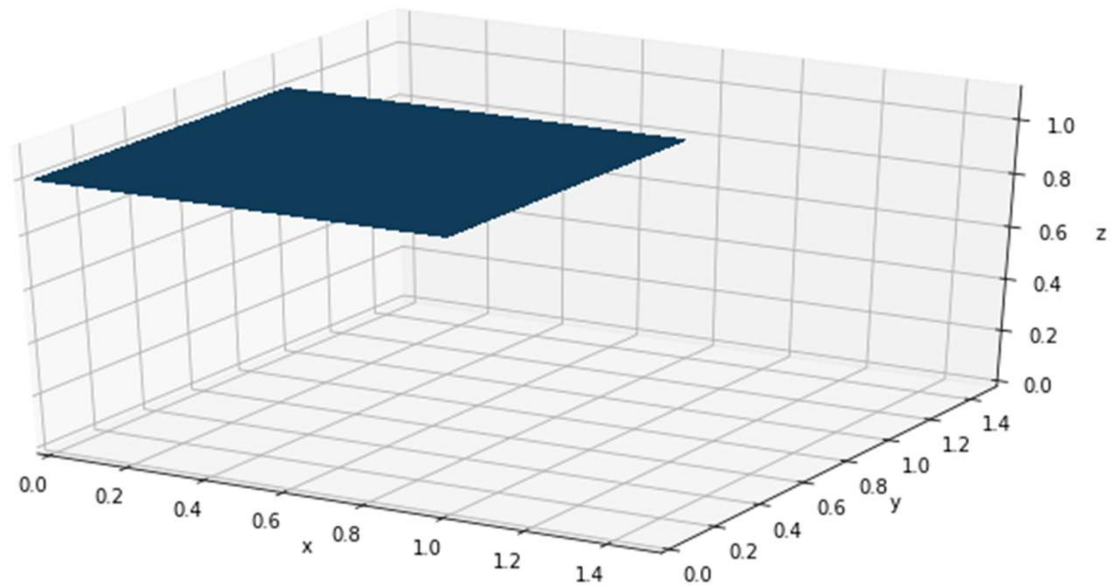
$$\iint_A \vec{f} d\vec{A} =$$

Vektorielles Flächenelement

Flächenelement $d\vec{A}, d\vec{O}$:

$$\iint_A \vec{f} d\vec{A} =$$

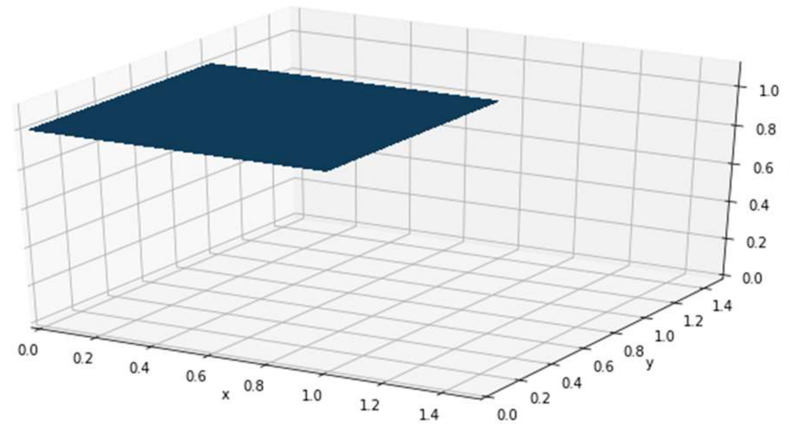
Definiere Fläche A:



Vektorielles Flächenelement

Flächenelement $d\vec{A}, d\vec{O}$:

Definiere Fläche A:



$$\iint_A \vec{f}\, d\vec{A} = \iint_{A_z} \vec{f}\Big|_{z=1} d\vec{A}_z$$

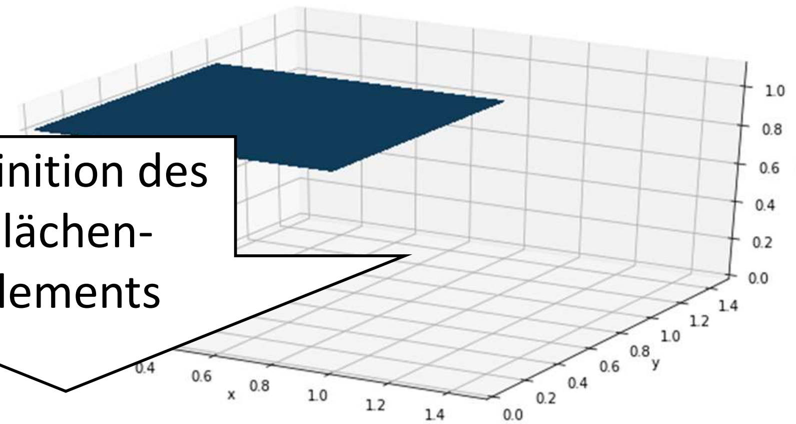
$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(f_x\vec{e}_x + f_y\vec{e}_y + f_z\vec{e}_z\right)\Big|_{z=1} \cdot (dx\, dy\vec{e}_z)$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 f_z(x,y,z)\Big|_{z=1} dx\, dy$$

$$= f_z(z=1) \cdot \int_0^1 f_z(x)\, dx \cdot \int_0^1 f_z(y)\, dy$$

Vektorielles Flächenelement

Flächenelement $d\vec{A}, d\vec{O}$:



Fläche A:

Definition der Funktion

Definition des Flächen-elements

$$\iint_A \vec{f}\, d\vec{A} = \iint_{A_z}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(f_x\vec{e}_x + f_y\vec{e}_y + f_z\vec{e}_z\right)\Big|_{z=1} \cdot \left(dx\, dy \vec{e}_z\right)$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 f_z(x,y,z)\Big|_{z=1} dx\, dy$$

$$= f_z(z=1) \cdot \int_0^1 f_z(x)\, dx \cdot \int_0^1 f_z(y)\, dy$$

Produkte der Einheitsvektoren

Konstanten

Volumenelement

Volumenelement dV, dK: Volumen V = Einheitswürfel

$$\iiint_V f\,dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$= \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 f(y)dy \cdot \int_0^1 f(z)dz$$

Achtung: Nur in GLET!!!

$$f(x,y,z) = f(x) \cdot f(y) \cdot f(z)$$

Rezept Integrale in 3D

1. Zu Integriendes beschreiben (Weg, Fläche, Volumen)
2. Definition Formel und Definition des Integrationsterms einsetzen
3. Ausmultiplizieren (Produkte der Einheitsvektoren nutzen)
4. Auseinanderziehen (Konstanten und Summenregel)
5. Einzeln berechnen

Die Kringel auf dem Integralzeichen

$$\oint, \oiint$$

Umlaufintegral $\oint$: Integral über eine geschlossene Kurve, Anfangs und Endpunkt sind gleich

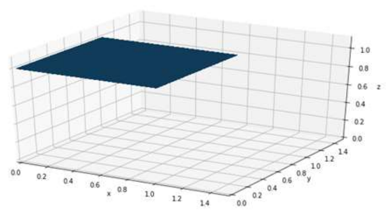
Hüllenintegral $\oiint$: Integral über die gesamte Oberfläche eines Körpers

Integrieren mit Zylinder- und Kugelkoordinaten

Karthesische Koordinaten

- Flächenelement $d\vec{A}, d\vec{O}$:

Fläche A



$$\iint_A \vec{f} d\vec{A} = \iint_{A_z} \vec{f}\Big|_{z=1} d\vec{A}_z$$

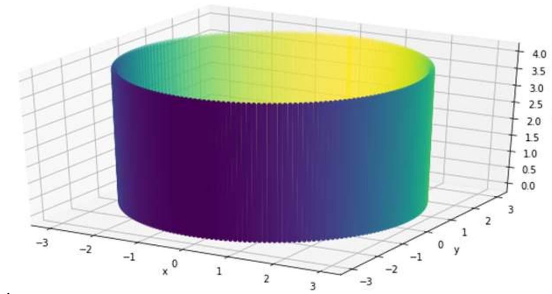
$$= \int_0^1 \int_0^1 f_z(x,y,z)\Big|_{z=1} dxdy$$

$$= f_z(z=1) \cdot \int_0^1 f_z(x)dx \cdot \int_0^1 f_z(y)dy$$

Zylinderkoordinaten

- Flächenelement $d\vec{A}, d\vec{O}$:

Fläche A: Mantelfläche



$$\iint_A \vec{f} d\vec{A} = \iint_{A\_\rho} \vec{f}\Big|_{\rho=\rho_0} d\vec{A}_\rho$$

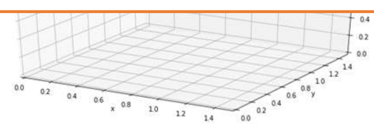
$$= \int_0^1 \int_0^1 f_\rho(\rho,\varphi,z)\Big|_{\rho=\rho_0} \boldsymbol{\rho} d\varphi dz$$

$$= \boldsymbol{\rho_0} \cdot f_\rho(\rho=\rho_0) \cdot \int_0^1 f_\rho(\varphi)d\varphi \cdot \int_0^1 f_\rho(z)dz$$

Integrieren mit Zylinder- und Kugelkoordinaten

Karthesische Koordinaten

- Flächenelement $d\vec{A}$, (



$$\iint_A \vec{f} d\vec{A} = \iint_{A_z} \vec{f}\Big|_{z=1} d\vec{A}_z$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 f_z(x,y,z)\Big|_{z=1} dxdy$$

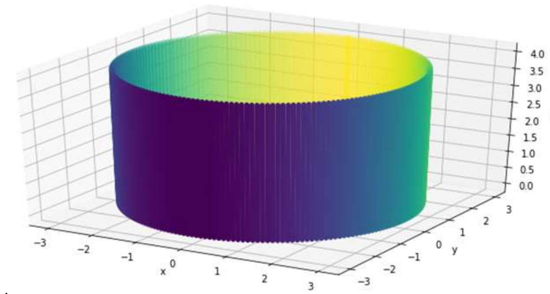
$$= f_z(z=1) \cdot \int_0^1 f_z(x)dx \cdot \int_0^1 f_z(y)dy$$

Exakt das gleiche nur mit Korrekturtermen.
Die sind Teil der Definition des Flächenelements.

Zylinderkoordinaten

$d\vec{O}$:

e

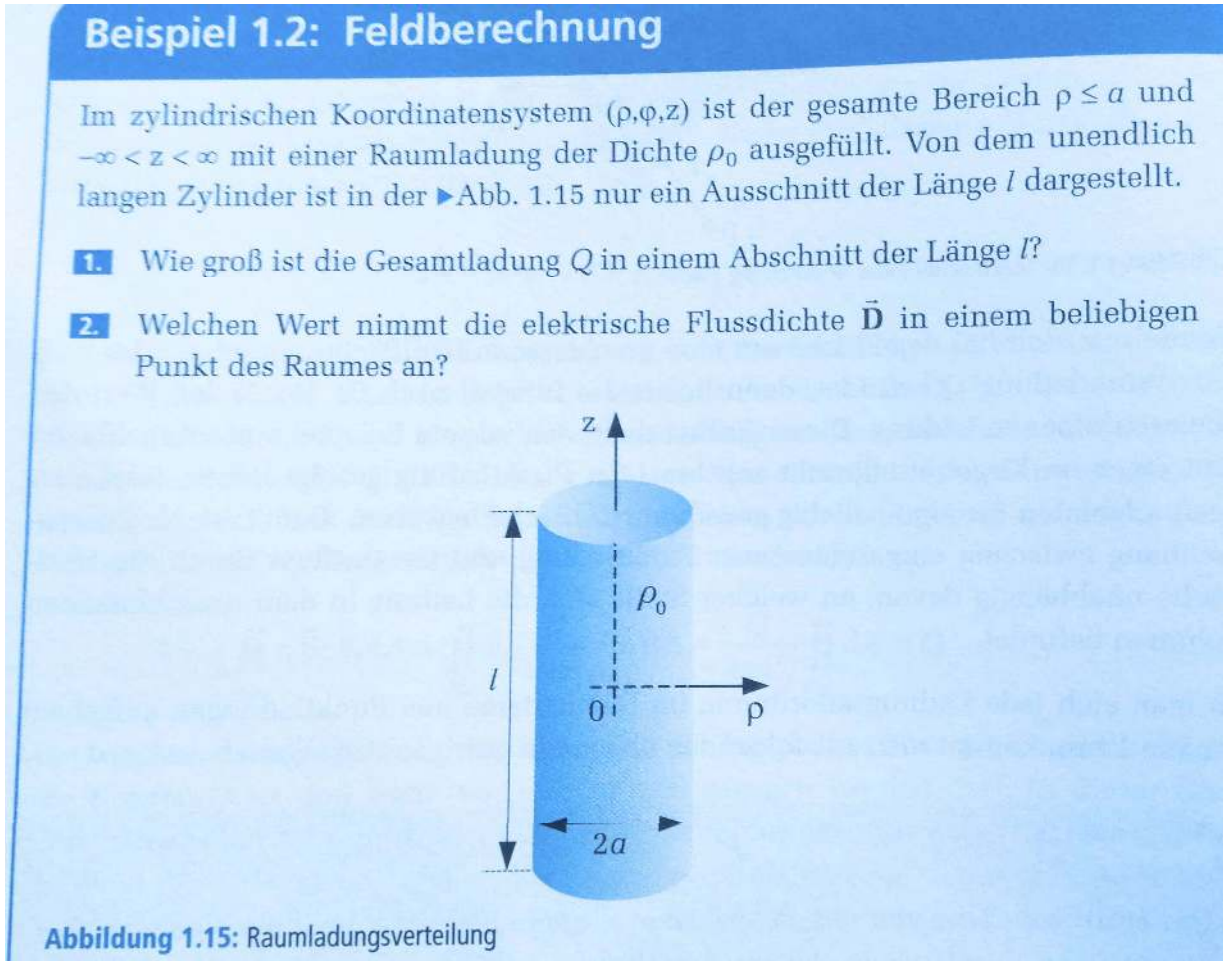


$$\iint_A \vec{f} d\vec{A} = \iint_{A\_\rho} \vec{f}\Big|_{\rho=\rho_0} d\vec{A}_\rho$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 f_\rho(\rho,\varphi,z)\Big|_{\rho=\rho_0} \boldsymbol{\rho} d\varphi dz$$

$$= \boldsymbol{\rho_0} \cdot f_\rho(\rho=\rho_0) \cdot \int_0^1 f_\rho(\varphi)d\varphi \cdot \int_0^1 f_\rho(z)dz$$

Beispiel aus dem Albach



Beispiel 1.2: Feldberechnung

Im zylindrischen Koordinatensystem (ρ,φ,z) ist der gesamte Bereich $\rho \le a$ und $-\infty < z < \infty$ mit einer Raumladung der Dichte ρ_0 ausgefüllt. Von dem unendlich langen Zylinder ist in der ▶Abb. 1.15 nur ein Ausschnitt der Länge l dargestellt.

1. Wie groß ist die Gesamtladung Q in einem Abschnitt der Länge l?
2. Welchen Wert nimmt die elektrische Flussdichte $\vec{\mathbf{D}}$ in einem beliebigen Punkt des Raumes an?

Abbildung 1.15: Raumladungsverteilung

Manfred Albach, Grundlagen der Elektrotechnik 1, 2. Auflage, 2008, Pearson Studium, S. 40

Tipps und Tricks

Integrale über 1

$$\int_a^b 1\,dx = b - a$$

$$\int_s \vec{1}\,d\vec{s} = L = \int_s 1\,ds$$

$$\iint_A \vec{1}\,d\vec{A} = A = \iint_A 1\,dA$$

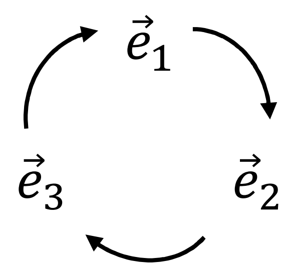
$$\iiint_V \vec{1}\,d\vec{V} = V = \iiint_V 1\,dV$$

Produkt und Kreuzprodukt der Einheitsvektoren

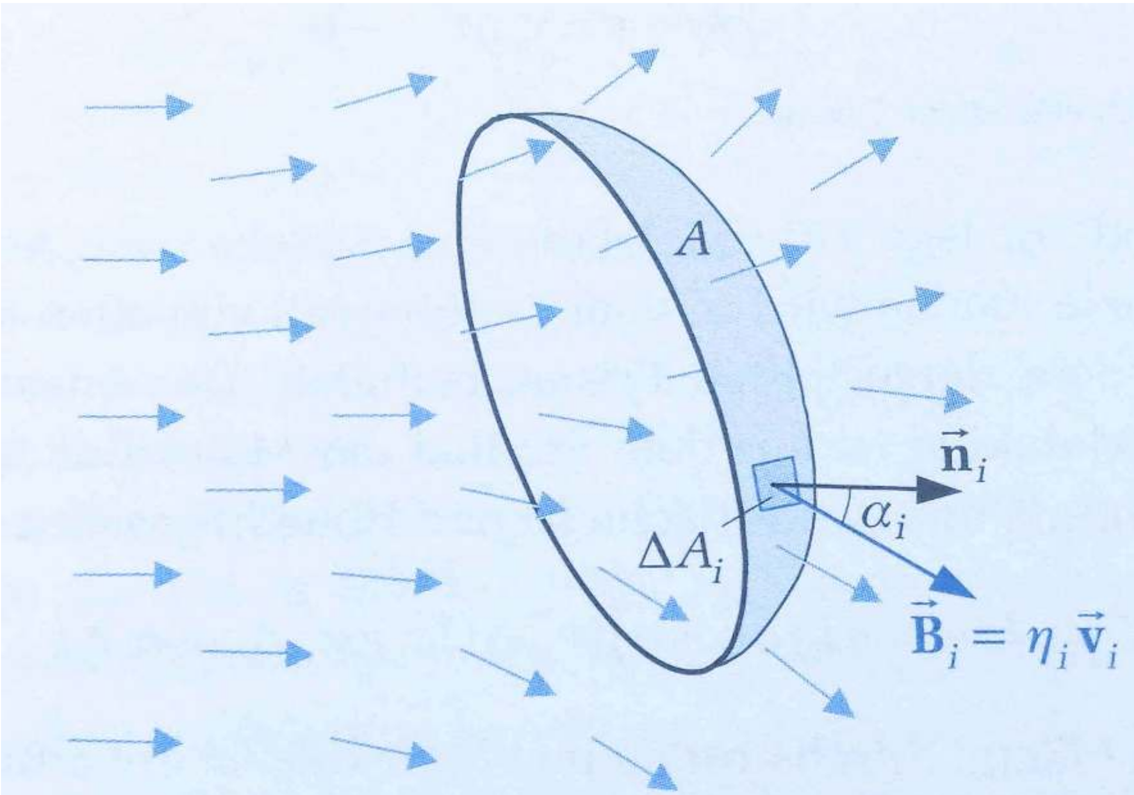
- Kreuzprodukt der Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 & - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 & - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 & - 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{e}_3 \, ,$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 & - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 & - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 & - 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0},$$



Work Smarter not Harder



Manfred Albach, Grundlagen der Elektrotechnik 1, 2. Auflage, 2008, Pearson Studium, S. 324

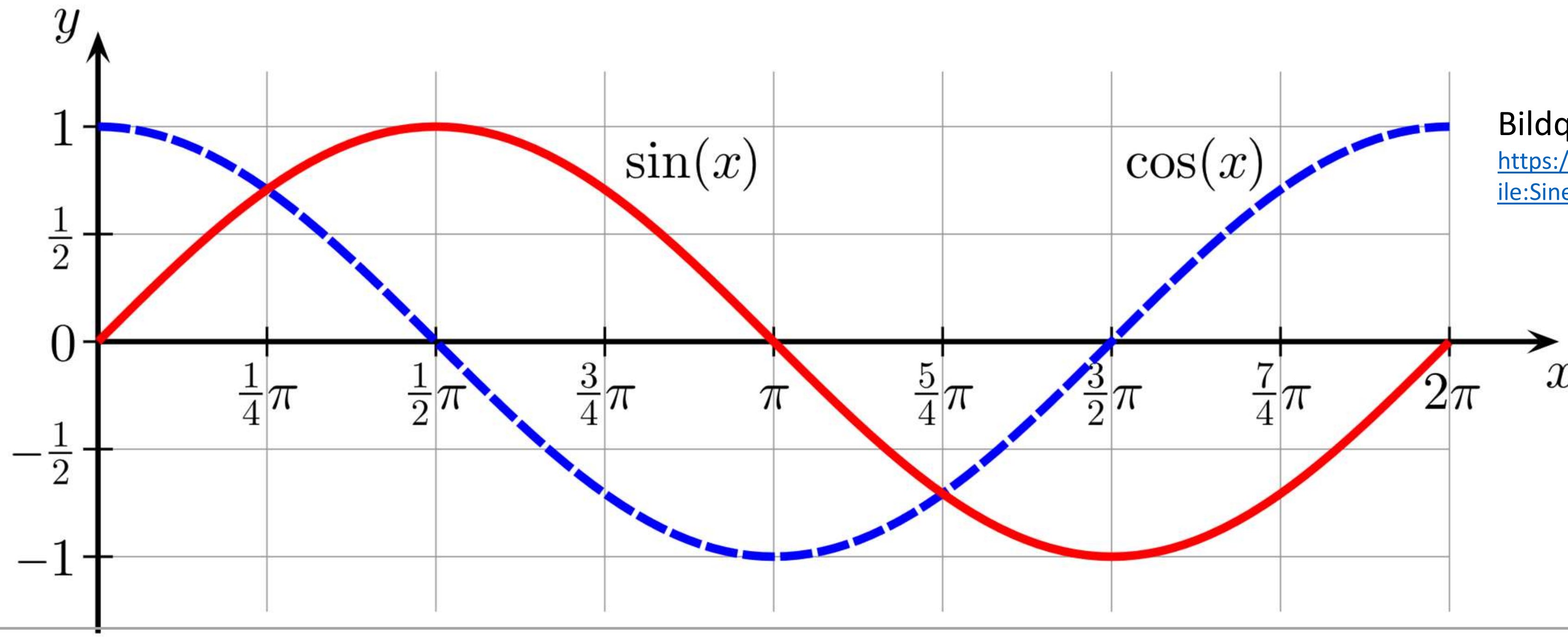
Nutze die einfachste Geometrie, die möglich ist.

Nützliches

- Fachtutorials auf YouTube
- Lehrbuchsammlung in der Bibliothek
- Wikipedia für Fachbegriffe auf Englisch
- wolframalpha.com
- Sprechstunden nutzen, auch per Email
- Spickzettel als Formelsammlung aufheben
- Wissenschaftliche Formelsammlung bzw. mathematisches Nachschlagewerk

Übungsaufgaben

Wichtige Funktionswerte von Sinus und Kosinus



Bildquelle: Geek3 CC BY 3.0
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sine_cosine_one_period.svg

x	**0**	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
sin(x)	0	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	$1/\sqrt{2}$	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0
cos(x)	1	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	$-1/\sqrt{2}$	-1	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	1