Ist $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl?

Zur Beantwortung dieser Frage nehmen wir an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl sei.

Rationale Zahlen sind Zahlen, die sich als Verhältnis von 2 ganzen Zahlen darstellen lassen. Also kann jede rationale Zahl als Bruch der Form $\frac{z}{n}$ geschrieben werden (Verhältnis von z zu n, oft auch $z : n$). Nach obiger Annahme, muss es eine Darstellung der Form $\frac{z}{n}$ von $\sqrt{2}$ geben. Wir gehen davon aus, dass der Bruch $\frac{z}{n}$ bereits gekürzt ist. Das heißt, z und n sind teilerfremd. Diese Einschränkung ändert nichts am allgemeinen Problem (o. B. d. A.), denn das Verhältnis der Zahlen ändert sich durch Kürzen oder Erweitern mit einer ganzen Zahl nicht.

Also können wir folgende Gleichung aufstellen

$$\sqrt{2} = \frac{z}{n}$$

Nun quadrieren wir die Gleichung, da dies die Umkehroperation zum Wurzelziehen ist

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 = \frac{z^2}{n^2} = \left(\frac{z}{n}\right)^2$$

Wir formen um

$$2 = \frac{z^2}{n^2} \quad \text{zu} \quad z^2 = 2n^2$$

Offensichtlich ist $2n^2$ gerade, denn jede ganze Zahl, die mit 2 multipliziert wird ist eine gerade Zahl. Entsprechend der Gleichung ist z^2 gerade. Damit ist auch z gerade, denn das Quadrat einer geraden Zahl ist gerade, da die 2 als Teiler erhalten bleibt. Folglich kann z auch so dargestellt werden

$$z = 2\tilde{z}$$

Entsprechend der obigen Annahmen ist $\tilde{z}$ eine ganze Zahl, denn wir haben bis jetzt nur mit rationalen Zahlen gerechnet.

Somit ergibt sich

$$2n^2 = z^2 = (2\tilde{z})^2 = 4\tilde{z}^2$$

mit Division durch 2

$$n^2 = 2\tilde{z}^2$$

Entsprechend folgt auch für n^2 und damit n, dass sie gerade Zahlen sind. Offensichtlich sind damit z und n durch 2 teilbar. Ganz oben haben wir jedoch festgelegt, dass z und n teilerfremd sind, also nicht mehr gekürzt werden können. Diese Eigenschaft ist verletzt.

Damit haben wir den Beweis auf einen Widerspruch geführt, denn es gibt keine 2 teilerfremden ganzen Zahlen mit denen $\sqrt{2}$ dargestellt werden kann. Die Annahme, $\sqrt{2}$ sei eine rationale Zahl, ist falsch. Da alle Zahlen, die nicht rational sind, irrational sind, gilt durch den Widerspruch das Gegenteil der Annahme: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Somit haben wir bewiesen, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist und damit eine irrationale Zahl ist.

Eine Näherung von $\sqrt{2}$ ist $1,4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766 7$...

Wahl zum Studierendenparlament an der TU Berlin

17. bis 21. Juni, jeweils von 9:30 bis 16:30 Uhr, im Hauptgebäude zwischen Audimax und H 0104. Außerdem kann in diesem Gebäude vom 17. bis 20. Juni per *Briefwahl im Wahllokal* gewählt werden.

Geht wählen!